

# Mécanique Analytique

Vincenzo Savona

December 8, 2025



# Préface

Ces notes de cours ne sont pas originales pour la plupart, mais elles tirent leur richesse de deux sources exceptionnelles. Elles s'appuient sur les **notes de cours de mécanique analytique établies par le Prof. Frédéric Mila**, dont la clarté, la profondeur et la rigueur formelle sont admirables. En complément, le livre *A Primer of Analytical Mechanics*, de **Franco Strocchi**, édité par Springer, offre une approche synthétique et bien structurée du sujet, qui privilégie l'intuition physique et la généralisation du formalisme au delà de la mécanique classique. En tant que rédacteur de ce document, je n'ai fait que sélectionner des éléments de ces deux précieuses ressources pour produire un cours qui marie l'intuition physique à la rigueur d'une dérivation formelle.

Bon cours !



# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Rappels de mécanique newtonienne</b>	<b>11</b>
2.1	Introduction . . . . .	11
2.2	Exemple d'une particule . . . . .	12
2.3	Système de $N$ particules . . . . .	14
2.4	Intégrales premières . . . . .	16
2.5	Contraintes et coordonnées généralisées . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Les difficultés de la mécanique newtonienne en coordonnées cartésiennes</b>	<b>21</b>
3.1	Forces de contrainte . . . . .	21
3.1.1	Le pendule simple (approche newtonienne) . . . . .	21
3.2	Référentiels non inertiels et forces fictives . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Équations de Lagrange</b>	<b>25</b>
4.1	Degrés de liberté et coordonnées lagrangiennes . . . . .	25
4.2	Changement de coordonnées et dépendance temporelle explicite . . . . .	25
4.3	Forme lagrangienne des équations de Newton . . . . .	26
4.4	Équations de Lagrange . . . . .	27
4.5	Les équations de Lagrange en action . . . . .	29
4.6	Potentiel généralisé . . . . .	32
4.7	Signification physique des équations de Lagrange : moments conjugués . . . . .	34
4.8	Principe de d'Alembert et déplacements virtuels . . . . .	36
4.8.1	Principe de d'Alembert. . . . .	37
4.8.2	Définition du déplacement virtuel. . . . .	37
4.8.3	Interprétation intuitive. . . . .	37
4.9	Dérivation des équations de Lagrange à partir du principe de d'Alembert . . . . .	38
4.9.1	Principe de d'Alembert en coordonnées cartésiennes. . . . .	38
4.9.2	Forces généralisées. . . . .	38
4.9.3	Identité impliquant l'énergie cinétique. . . . .	39
4.9.4	Forme généralisée du principe de d'Alembert. . . . .	40
4.9.5	Variables cycliques, symétries et moments conjugués conservés . . . . .	41
4.9.6	Systèmes isolés . . . . .	42
4.9.7	Non-unicité du Lagrangien . . . . .	43

<b>5</b>	<b>La formulation variationnelle de la mécanique analytique</b>	<b>45</b>
5.1	Le principe de moindre action en physique . . . . .	45
5.2	Introduction au calcul des variations . . . . .	47
5.3	Le principe de moindre action . . . . .	49
5.3.1	Théorème des extremums liés . . . . .	50
5.4	Principe de moindre action et contraintes holonomes . . . . .	51
5.5	Équations de Lagrange et forces de contrainte . . . . .	54
5.6	Principe de moindre action et contraintes plus générales . . . . .	55
5.7	Contraintes intégrales . . . . .	58
5.8	Lagrangien et changements de référentiels . . . . .	60
5.9	Le Théorème de Noether (1918) . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Les équations de Hamilton</b>	<b>63</b>
6.1	Conservation de l'énergie . . . . .	63
6.2	Équations de Hamilton . . . . .	66
6.3	Transformations de coordonnées et équations de Hamilton . . . . .	68
6.4	Transformations canoniques . . . . .	70
6.5	Crochets de Poisson et structure canonique . . . . .	74
6.5.1	Constantes du mouvement identifiées par les crochets de Poisson . . . . .	74
6.5.2	Propriétés générales des crochets de Poisson . . . . .	76
6.5.3	Structure canonique . . . . .	77
6.5.4	Invariance des crochets de Poisson sous les transformations canoniques . . . . .	80
6.6	Transformations canoniques et fonctions génératrices . . . . .	82
6.7	L'équation de Hamilton–Jacobi . . . . .	89
6.7.1	Interprétation de $S$ . . . . .	92
6.7.2	L'équation de Hamilton–Jacobi : $H$ indépendant de $t$ . . . . .	94
6.7.3	L'équation de Hamilton–Jacobi : séparation des variables . . . . .	95
6.7.4	Lien entre la théorie de Hamilton–Jacobi et la mécanique quantique . . . . .	97
<b>7</b>	<b>L'espace des phases</b>	<b>99</b>
7.1	Définition . . . . .	99
7.2	Systèmes à 1 degré de liberté : portrait de phase . . . . .	99
7.3	Systèmes à un degré de liberté : variables action–angle . . . . .	101
7.4	Systèmes séparables : variables action–angle . . . . .	104
7.5	Systèmes intégrables . . . . .	105
7.6	Théorème de Liouville . . . . .	106
<b>8</b>	<b>Introduction aux systèmes dynamiques</b>	<b>109</b>
8.1	Définitions . . . . .	109
8.2	Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs . . . . .	109
8.2.1	Points fixes et stabilité . . . . .	111
8.2.2	Petites oscillations : Le point de vue lagrangien . . . . .	114
8.2.3	Petites oscillations : Le point de vue hamiltonien . . . . .	120

# Chapter 1

## Introduction

Vous avez appris à résoudre des problèmes de mécanique en utilisant la mécanique newtonienne dans des coordonnées cartésiennes. Pour une masse ponctuelle, cela consiste à résoudre la deuxième loi de Newton :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{F}$  inclut toutes les forces agissant sur la masse, y compris les forces de contrainte (si des contraintes sont présentes) et les forces fictives (si le problème est résolu dans un référentiel non inertiel).

Si le problème implique la rotation d'un corps rigide, nous devons également considérer les équations d'Euler pour le mouvement de rotation :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{L}$  est le moment cinétique et  $\boldsymbol{\tau}$  est le moment total, incluant les contributions des contraintes.

Pour les systèmes comportant plusieurs corps en interaction, comme par exemple le système solaire, nous devons combiner ces approches et prendre en compte toutes les forces d'interaction et tous les couples agissant sur chaque corps.

### Pourquoi avons-nous besoin de la mécanique analytique ?

À première vue, la mécanique newtonienne en coordonnées cartésiennes semble suffisante pour résoudre tous les problèmes de mécanique classique. Après tout, les lois de Newton fournissent une prescription claire pour prédire le mouvement des particules et des corps rigides : spécifier les forces, écrire les équations du mouvement, et les résoudre pour obtenir les positions et les vitesses au cours du temps. Alors, pourquoi introduire un nouveau formalisme ?

La réponse réside dans les difficultés pratiques et conceptuelles qui apparaissent lorsqu'on applique les lois de Newton à des systèmes complexes. Dans de nombreux cas, les variables naturelles pour décrire la configuration d'un système ne sont pas les coordonnées cartésiennes, mais plutôt un ensemble réduit de variables efficaces — comme des angles ou des distances — qui incorporent automatiquement les contraintes du système. Lorsqu'il y a des contraintes, la mécanique newtonienne nous oblige à introduire des forces de contrainte supplémentaires, souvent inconnues, et à travailler avec des coordonnées redondantes. Éliminer ces forces et réduire les équations à l'ensemble minimal de variables peut être un processus difficile et non systématique.

De plus, les équations de Newton ne sont pas invariantes de forme lors d'un changement de coordonnées. Par exemple, lorsqu'on résout le problème à deux corps avec force gravitationnelle, comme le mouvement d'une planète autour du soleil, les équations ne sont pas les mêmes selon

qu'on les écrit dans les coordonnées des deux corps ou dans les coordonnées du centre de masse et relatives. Si le changement de coordonnées correspond à un passage d'un référentiel inertiel à un référentiel non inertiel, alors des forces fictives apparaissent et doivent être prises en compte. Cela modifie encore une fois la forme des équations du mouvement.

Le *formalisme lagrangien* en mécanique analytique répond à toutes ces difficultés. Il fournit la description la plus simplifiée de l'évolution temporelle d'un système en introduisant un ensemble minimal de coordonnées, dites *coordonnées généralisées*, qui décrivent la configuration du système, ne sont pas soumises à des contraintes et n'impliquent donc aucune force de contrainte. L'évolution temporelle de des coordonnées généralisées est régie par les *équations de Lagrange*, qui sont exprimées en termes de la *fonction lagrangienne*. Ces équations sont invariantes vis-à-vis d'un changement arbitraire de coordonnées, y compris ceux qui apparaissent lorsqu'on décrit le mouvement dans un référentiel non inertiel. Dans la plupart des cas, la fonction lagrangienne est facile à déterminer. Par exemple, pour les systèmes conservatifs, elle est simplement donnée par l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle. Dans le formalisme lagrangien, un changement de coordonnées conduit simplement aux mêmes équations de Lagrange, avec les anciennes coordonnées exprimées en fonction des nouvelles dans la fonction lagrangienne.

La description lagrangienne de la mécanique peut être dérivée du principe de Hamilton de l'action stationnaire. Selon ce principe variationnel, les équations de Lagrange proviennent de l'exigence que l'évolution temporelle des coordonnées, pour des conditions initiales et finales données, soit celle qui minimise un fonctionnel de la fonction lagrangienne, appelé *action*. La recherche du minimum de l'action conduit directement aux équations de Lagrange et à leur solution pour des conditions initiales données. Traditionnellement, un cours de mécanique analytique commence par le principe de Hamilton pour dériver les équations de Lagrange. Cette dérivation, bien que générale et rigoureuse, n'est pas indispensable, et nous proposerons ici une dérivation plus simple et physiquement intuitive des équations de Lagrange, en réservant le principe de Hamilton pour plus tard.

Le principe variationnel de Hamilton est toutefois d'une importance capitale en tant que généralisation, car il conduit aux équations qui régissent la dynamique d'une variété de systèmes au-delà des systèmes mécaniques. Ceux-ci incluent notamment les champs électromagnétiques et gravitationnels classiques. Plus important encore, le principe de l'action stationnaire joue un rôle fondamental dans le lien entre la mécanique quantique et la mécanique classique. En effet, la formulation de la mécanique quantique par intégrale de chemin, due à Richard Feynman, repose sur l'hypothèse que le comportement d'un système quantique dépend de tous les chemins possibles, et non seulement de ceux pour lesquels l'action est stationnaire. Les amplitudes de probabilité des résultats possibles de mesures sont alors déterminées par la valeur de l'action pour tous les chemins possibles, à travers une construction appelée *intégrale de chemin*. La limite classique d'un système quantique émerge alors naturellement comme le chemin qui satisfait la condition d'action stationnaire.

La mécanique analytique se développe ensuite dans le formalisme hamiltonien, qui repose sur l'introduction de la fonction hamiltonienne et des coordonnées conjuguées généralisées. La fonction hamiltonienne possède une interprétation physique plus directe que la fonction lagrangienne, étant en général liée à la fonction de l'énergie (pour les systèmes conservatifs, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle). Son introduction, par l'astuce formelle d'une transformation de Legendre, remplace les équations de Lagrange, qui sont du second ordre en la dérivée temporelle, par des équations du premier ordre pour les variables canoniques  $q, p$ . De cette manière, les conditions initiales portent sur les valeurs initiales des coordonnées et des moments conjugués, qui possèdent en général une signification physique directe (par exemple, dans le cas de coordonnées cycliques, les moments conjugués correspondants sont des constantes du mouvement). Bien que la fonction hamiltonienne soit généralement liée à l'énergie du système, la relation précise entre le hamiltonien

et la fonction de l'énergie est une question délicate, et le hamiltonien peut différer de la fonction de l'énergie dans de nombreux cas que nous discuterons avec des exemples illustratifs. À notre avis, le véritable pilier fondamental de la formulation hamiltonienne est la structure canonique qui en découle, laquelle est non seulement importante au niveau conceptuel, mais fournit également des outils très utiles pour discuter et résoudre les problèmes mécaniques. En particulier, cela permet de :

- identifier directement les constantes du mouvement à travers l'annulation de leurs crochets de Poisson avec le hamiltonien, sans avoir besoin de connaître les solutions du problème dynamique ;
- établir le lien entre les symétries du hamiltonien et les lois de conservation ;
- utiliser les transformations canoniques pour réduire le hamiltonien à une forme plus simple ; les générateurs de transformations canoniques infinitésimales agissant en termes de crochets de Poisson ;
- voir émerger l'algèbre canonique, etc.

La reconnaissance de ces structures à la base de la mécanique analytique fournit également un lien simple avec les structures correspondantes en mécanique quantique, l'image qui en ressort étant essentiellement la même, une fois le rôle des crochets de Poisson remplacé par les commutateurs.



## Chapter 2

# Rappels de mécanique newtonienne

### 2.1 Introduction

L'objet de la mécanique est de décrire l'évolution au cours du temps d'un système de particules (= points matériels) en interaction. L'expérience prouve que l'état d'un système est entièrement déterminé si l'on se donne la position et la vitesse de chaque particule à un instant donné. Si l'on repère les particules par un indice  $i$ , on définit :

$$\begin{aligned} m_i &\equiv \text{masse de la particule } i, \\ \overrightarrow{OM}_i &\equiv \vec{r}_i = \text{position de la particule } i, \\ \vec{v}_i &\equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \text{vitesse de la particule } i, \\ \vec{p}_i &\equiv m_i \vec{v}_i = \text{impulsion de la particule } i, \\ \vec{a}_i &\equiv \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \text{accélération de la particule } i. \end{aligned}$$

La loi fondamentale de la dynamique, aussi appelée **deuxième loi de Newton**, stipule que l'évolution du système peut se décrire à l'aide du système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

où  $\vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$  est *a priori* une fonction des positions et des vitesses de toutes les particules, ainsi que du temps, mais *pas* des accélérations.

En général, les masses ne dépendent pas du temps, et on obtient donc un système d'équations différentielles du second ordre :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

*Exemples :*

- $\vec{F}_i = -G \sum_{k \neq i} m_i m_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_k\|^3}$  (Gravitation universelle)
- $\vec{F}_i = q \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right)$  (Particule dans un champ électromagnétique)

Dans tous les exemples d'application courante, la force  $\vec{F}_i$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}(\vec{r}_i, \vec{v}_i, \vec{r}_j, \vec{v}_j, t). \quad (2.3)$$

**Première loi de Newton** : il existe des référentiels dits inertiels ou galiléens dans lesquels, pour un système de particules isolées,  $\vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$ .

Pour beaucoup de situations expérimentales, un référentiel fixe par rapport à la terre peut être considéré comme galiléen, mais il est néanmoins souvent nécessaire de se placer dans un référentiel lié au soleil ou aux étoiles fixes pour avoir une approximation correcte d'un référentiel galiléen.

**Troisième loi de Newton** (principe de l'action et de la réaction) :

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (2.4)$$

Remarque : c'est vrai pour la gravitation universelle, le problème majeur auquel s'intéressait Newton, mais pas de façon générale, par exemple pour l'interaction entre particules chargées en mouvement.

## 2.2 Exemple d'une particule

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad (2.5)$$

Pour une particule isolée dans un référentiel galiléen,  $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}$  est constant.

C'est une autre formulation de la *première loi de Newton* : une particule isolée dans un référentiel galiléen est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Si  $\vec{F}^{\text{ext}} \neq \vec{0}$ , il est souvent utile d'introduire des fonctions de  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  pour étudier le mouvement.

### Moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (2.6)$$

(N.B.  $\vec{r} = O\vec{M} \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} =$  moment cinétique par rapport au point  $O$ ).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{p}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} \quad (2.7)$$

**Théorème du moment cinétique** : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment des forces extérieures.

**Application** : si  $\vec{r} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$ , par exemple pour une force centrale telle que  $\vec{F}^{\text{ext}} \parallel \vec{r}$ ,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} \text{ est constant.} \quad (2.8)$$

### Travail et énergie

Le travail de la force  $\vec{F}^{\text{ext}}$  le long d'une trajectoire allant d'un point 1 à un point 2 est défini par

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ext}} \cdot d\vec{s} \quad (2.9)$$

où  $\vec{s}$  est l'abscisse curviligne le long de la trajectoire.

Puisque  $\vec{F}^{\text{ext}} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  et  $d\vec{s} = \vec{v}dt$ , on a

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \int_1^2 m \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dt = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mais  $\frac{mv^2}{2} \equiv T = \text{énergie cinétique}$ , et donc

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (2.11)$$

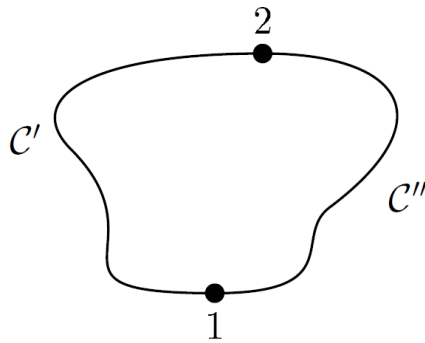
**Cas particulier :** Systèmes conservatifs.

Un système est dit conservatif si le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

*Conséquence :*

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

En effet, décomposons le chemin  $\mathcal{C}$  en deux chemins  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  tels que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \cup \mathcal{C}''$



Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{1\mathcal{C}'}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{1\mathcal{C}''}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{2\mathcal{C}''}^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ \Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{1\mathcal{C}'}^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{2\mathcal{C}''}^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Or, d'après la formule de Stokes,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \int_{\mathcal{S}} \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (2.13)$$

où  $\mathcal{S}$  est une surface quelconque s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ .

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{0} \text{ pour tout chemin fermé } \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{F} = \vec{0}} \quad (\text{voir exercices}). \quad (2.14)$$

**Potentiel :**

Puisque  $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ , il existe une fonction  $V(\vec{r})$  telle que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad (2.15)$$

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_1^2 \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} = V_1 - V_2. \quad (2.16)$$

On dit que  $\vec{F}$  dérive du potentiel  $V$ .

On obtient donc dans le cas d'une force conservative :

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= T_2 - T_1 \\ \Rightarrow T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si on définit l'énergie mécanique par  $E = T + V$ , on en déduit un nouveau théorème.

**Théorème de l'énergie mécanique** : pour un système où la force dérive d'un potentiel, l'énergie mécanique est conservée.

## 2.3 Système de $N$ particules

Considérons un système de  $N$  particules dont les interactions mutuelles sont régies par la troisième loi de Newton (principe de l'action et de la réaction).

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \\ \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji}}_{=\sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Il est utile d'introduire les définitions suivantes :

Centre de masse :

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (2.19)$$

Impulsion totale :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{R}} \quad (2.20)$$

On obtient donc :

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} \quad (2.21)$$

**Théorème** : le centre de masse se comporte comme un point matériel de masse totale  $M$  soumis à une force extérieure égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur chacune des particules.

**Corollaire** : pour un système isolé dans un référentiel galiléen,  $\vec{P}$  est conservé.

Introduisons les coordonnées barycentriques par rapport au centre de masse

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{R} + \vec{r}'_i \\ \vec{v}_i &= \vec{V} + \vec{v}'_i, \quad \vec{V} = \dot{\vec{R}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

**Moment cinétique**

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \\ &= \sum_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \wedge m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i) \\ &= \sum_i \left[ \vec{R} \wedge m_i \vec{V} + \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{V} + \vec{R} \wedge m_i \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \sum_i \vec{R} \wedge m_i \vec{V} = M \vec{R} \wedge \vec{V} \\
\bullet \quad & \sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_i m_i \vec{r}_i - M \vec{R} = \vec{0} \\
\bullet \quad & \sum_i m_i \vec{v}'_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \\
\Rightarrow \quad & \vec{L} = M \vec{R} \wedge \vec{V} + \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{p}'_i.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

**Premier théorème de Kœnig** : le moment cinétique par rapport au point  $O$  est égal à la somme du moment cinétique du centre de masse par rapport au point  $O$  et des moments cinétiques des particules par rapport au centre de masse.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{L} &= \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \wedge \vec{p}_i}_{=\vec{0}} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i \\
&= \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji}}_{\sum_{i < j} (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij})} \\
&= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ji}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

**Théorème du moment cinétique** : si  $\vec{F}_{ji}$  est dirigée suivant  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  (c'est le cas pour la gravitation), la dérivée par rapport au temps du moment cinétique est égale au moment des forces extérieures appliquées au système :

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}. \tag{2.26}$$

Pour un système isolé,  $\vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$  dans un référentiel galiléen

$$\Rightarrow \quad \vec{L} \text{ est conservé.}$$

**Energie** : L'énergie cinétique totale est donnée par

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i)^2 \\
&= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 \quad \left( \sum_i m_i \vec{v}'_i = \vec{0} \right).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

**Deuxième théorème de Kœnig** : l'énergie cinétique totale est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique des particules par rapport au centre de masse.

**Travail** : Supposons que le système évolue entre une configuration  $A = \{\vec{r}_1^A, \dots, \vec{r}_N^A, \vec{v}_1^A, \dots, \vec{v}_N^A\}$  et  $B = \{\vec{r}_1^B, \dots, \vec{r}_N^B, \vec{v}_1^B, \dots, \vec{v}_N^B\}$ . Le travail des forces  $\vec{F}_i$  entre  $A$  et

$B$  est défini par

$$\begin{aligned}
 W_{AB} &= \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i \\
 &= \sum_i \int_A^B m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i \int_A^B m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i^2) dt \\
 \Rightarrow W_{AB} &= T_B - T_A
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Supposons que

$$\vec{F}_i^{\text{ext}} = -\vec{\nabla}_i V_i \tag{2.29}$$

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}, \quad V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \tag{2.30}$$

Cette deuxième condition est satisfaite si la loi d'action-réaction est satisfaite, et si la force est dirigée suivant  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ . Alors

$$\int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j = - \int_A^B \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{s}_i - \int_A^B \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot d\vec{s}_j. \tag{2.31}$$

Mais si on définit  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  et  $\vec{\nabla}_{ij} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}}$ , on a

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} \tag{2.32}$$

$$\text{et } d\vec{s}_i - d\vec{s}_j = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij} \tag{2.33}$$

$$\text{d'où } \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j = - \int_A^B \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = V_{ij}^A - V_{ij}^B. \tag{2.34}$$

Comme

$$\sum_i \left( \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \left( \int_A^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j \right), \tag{2.35}$$

on en déduit :

$$W_{AB} = V_A - V_B \tag{2.36}$$

$$V_A = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}. \tag{2.37}$$

L'énergie mécanique totale  $E = T + V$  est alors conservée.

## 2.4 Intégrales premières

De façon générale, une intégrale première est une fonction des positions, des vitesses et du temps qui est conservée au cours du temps :

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) = \text{constante}. \tag{2.38}$$

Chaque intégrale première conduit à une équation différentielle du *premier ordre*. Comme un système mécanique est défini par la donnée de la position et de la vitesse de chaque particule, les intégrales premières sont un pas très utile vers la solution.

Si on connaît  $6N$  intégrales premières pour un système, il suffit d'inverser le système :

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t) = c_i, \quad i = 1, \dots, 6N \quad (2.39)$$

pour résoudre explicitement les équations du mouvement et obtenir les positions et les vitesses en fonction du temps

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_i &= g_i(c_1, \dots, c_{6N}, t) \\ \vec{v}_i &= h_i(c_1, \dots, c_{6N}, t) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Une grande partie de ce cours sera donc logiquement consacrée à la recherche d'intégrales premières. Malheureusement (ou heureusement ?!) il n'est en général pas possible de trouver  $6N$  intégrales premières. Dans le cas d'un système de particules isolées avec des interactions à 2 corps dérivant d'un potentiel, on a en général 10 intégrales premières :

- $\vec{P}$  (3)
- $M\vec{R} - \vec{P}t$  (3)
- $\vec{L}$  (3)
- $E$  (1)

Dans le cas d'une particule, elles ne sont bien sûr pas indépendantes. Dans le cas de deux particules, il en faudrait déjà 12 pour que le problème soit résolu. Il faut donc encore travailler. Dans le cas général, l'existence ou non d'intégrales premières a des conséquences sur la nature du mouvement (mouvement régulier ou chaotique). L'un des objectifs des développements de ce cours est d'exposer la méthode la plus systématique de recherche d'intégrales premières.

Alors que la conservation de  $E$ ,  $\vec{P}$  et  $\vec{L}$  pour un système conservatif et en l'absence de forces extérieures est bien comprise, la conservation de la quantité  $\vec{Q} = M\vec{R} - \vec{P}t$  est moins évidente et nous allons la discuter plus en détail. Le vecteur  $\vec{Q}$  est appelé le *générateur des boosts galiléens*. Un boost galiléen est une transformation de coordonnées qui correspond à un changement de référentiel inertiel se déplaçant à une vitesse constante par rapport au référentiel initial.

Pour voir qu'il est conservé, il suffit de remarquer que le centre de masse obéit à l'équation du mouvement

$$M\ddot{\vec{R}} = \dot{\vec{P}} = 0, \quad (2.41)$$

donc

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M}t, \quad (2.42)$$

Où  $\vec{R}_0$  est la position initiale, à  $t = 0$ , du centre de masse. Par conséquent

$$\vec{Q} = M\vec{R}(t) - \vec{P}t = M\vec{R}_0, \quad (2.43)$$

qui est constant dans le temps. Bien que  $\vec{Q}$  soit exprimé aussi en fonction de  $\vec{P}$ , il n'est pas complètement dépendant de  $\vec{P}$  et constitue donc un ensemble de trois intégrales premières indépendantes. Intuitivement,  $\vec{P}$  détermine la *vitesse* du centre de masse, tandis que  $\vec{Q}$  détermine sa *position initiale*. Ensemble, ils caractérisent complètement le mouvement inertiel du centre de masse. Plus tard dans le cours, quand on introduira le théorème de Noether et le lien entre symétries et intégrales premières, on verra que  $\vec{Q}$  est associé à l'invariance du système sous les boosts galiléens. Ceci s'ajoute à l'invariance sous les translations spatiales (associée à la conservation de  $\vec{P}$ ), les rotations (associée à la conservation de  $\vec{L}$ ) et les translations temporelles (associée à la conservation de  $E$ ).

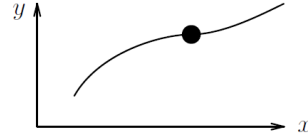
## 2.5 Contraintes et coordonnées généralisées

La formulation newtonienne de la mécanique est mal adaptée à un certain type d'action extérieure appelée *contrainte*.

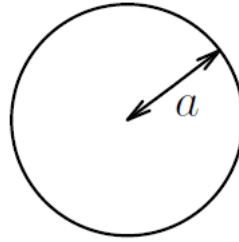
**Exemples :**

- Corps solides :  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = d_{ij}^2 = \text{constante}$ .

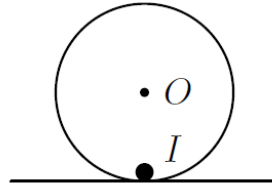
- Perle sur un fil :  $y = f(x)$  est fixé au départ.



- Particule qui se déplace sur une sphère :  $r^2 \geq a^2$ .



- Sphère qui roule sans glisser sur un plan :  $\vec{V}_I = \vec{0}$ .  
Une telle contrainte fait intervenir la vitesse.



En général, une contrainte s'écrit comme une égalité ou une inégalité qui fait intervenir les positions, les vitesses et le temps. Dans le cadre de la mécanique newtonienne, il faut faire intervenir des forces extérieures qui ne sont pas connues *a priori* et qui doivent s'adapter pour que les contraintes soient satisfaites.

### Contraintes holonômes

Une contrainte holonôme est une contrainte qui peut se mettre sous la forme

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (2.44)$$

- Egalité
- Les vitesses n'apparaissent pas.

Supposons qu'un système soit défini par  $k$  contraintes holonômes. Le système d'équations

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.45)$$

doit permettre d'exprimer les positions  $\vec{r}_i$  en fonction de  $3N - k$  coordonnées généralisées  $q_i$  :

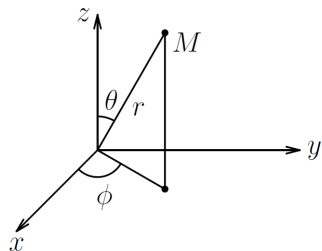
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t). \quad (2.46)$$

*Définition* : tout système de coordonnées  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, 3N - k$ , qui permet de décrire un système en satisfaisant automatiquement les  $k$  contraintes holonômes auxquelles il est soumis s'appelle un système de coordonnées généralisées.

*Remarque* : s'il n'y a aucune contrainte, tous les systèmes de coordonnées sont des systèmes de coordonnées généralisées !

*Exemple* : particule astreinte à se déplacer sur une sphère :  $r = a$ .

En coordonnées sphériques,



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$\theta, \phi$  sont les coordonnées généralisées.

Si le problème est simplement de trouver les équations du mouvement satisfaites par les coordonnées généralisées, autrement dit, si l'on n'a pas besoin de déterminer les forces de contraintes, les équations de la mécanique newtonienne sont mal adaptées.

Par ailleurs, dans un tel cas, l'énergie potentielle est souvent plus facile à exprimer en fonction des coordonnées généralisées que des coordonnées cartésiennes. Malheureusement, la formulation newtonienne de la mécanique fait intervenir les forces, c'est-à-dire les dérivées de l'énergie potentielle par rapport aux coordonnées cartésiennes.



## Chapter 3

# Les difficultés de la mécanique newtonienne en coordonnées cartésiennes

Dans cette section et la suivante, sur la base d'exemples simples, nous discuterons des difficultés de la formulation newtonienne de la mécanique qui découlent de la présence de forces de contrainte et de forces fictives.

### 3.1 Forces de contrainte

Selon la mécanique newtonienne, le mouvement d'une particule de masse  $m$  est régi et entièrement décrit par les équations de Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{a}$  est l'accélération et  $\mathbf{F}$  la somme des forces qui agissent sur elle.

D'un point de vue mathématique, le problème est bien posé et admet une solution unique (sous des conditions générales) une fois la position et la vitesse initiales spécifiées. Cependant, cela requiert la connaissance a priori de  $\mathbf{F}$ , ce qui n'est pas le cas en présence de contraintes.

En effet, en général eq. (3.1) peut s'écrire

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f} + \mathbf{R}, \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{f}$  est la somme des forces externes (connues) et  $\mathbf{R}$  la somme des forces de contrainte, qui ne sont pas connues a priori, puisque les contraintes exercent précisément les forces nécessaires pour contraindre le mouvement à chaque instant. Un exemple simple illustrera ces points.

#### 3.1.1 Le pendule simple (approche newtonienne)

Considérons un pendule simple constitué d'une masse  $m$  attachée à une extrémité d'une tige rigide et sans masse de longueur  $l$ . L'autre extrémité de la tige est fixée au pivot. Supposons que le pendule oscille dans un plan vertical sous l'effet de la pesanteur.

Nous commençons par choisir des coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , avec l'origine au point de pivot et l'axe  $y$  orienté verticalement vers le haut. La position de la masse est ainsi décrite par :

$$(x, y) \quad (3.3)$$

Les forces agissant sur la masse sont :

- Gravité :  $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = (0, -mg)$
- Tension :  $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$  (force exercée par la tige)

Comme la tige est rigide et sans masse, la distance entre le pivot et la masse reste constante, introduisant la contrainte :

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (3.4)$$

La seconde loi de Newton sous forme vectorielle est :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{T} \quad (3.5)$$

En composantes, on obtient :

$$m\ddot{x} = T_x, \quad m\ddot{y} = T_y - mg \quad (3.6)$$

La force de tension est inconnue et agit comme une force de contrainte.

Nous introduisons maintenant des coordonnées polaires en définissant l'angle  $\theta$  (mesuré à partir de l'axe  $y$  négatif, c'est-à-dire la position verticale vers le bas) :

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta \quad (3.7)$$

En dérivant deux fois, on a :

$$\ddot{x} = l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta (\dot{\theta})^2, \quad \ddot{y} = l \sin \theta \ddot{\theta} + l \cos \theta (\dot{\theta})^2 \quad (3.8)$$

En utilisant les contraintes dans les équations du mouvement, nous multiplions les équations respectivement par  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ , puis nous les additionnons pour éliminer la tension :

$$m(\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta) = T_x \cos \theta + (T_y - mg) \sin \theta \quad (3.9)$$

En notant que  $T_x \cos \theta + T_y \sin \theta = 0$  (puisque la tension est perpendiculaire au déplacement), on obtient :

$$l \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (3.10)$$

Il s'agit de l'équation du mouvement du pendule exprimée en la variable effective  $\theta$  :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}. \quad (3.11)$$

Nous dérivons maintenant la même équation du mouvement à l'aide de la conservation de l'énergie, le système étant conservatif. Utiliser la conservation de l'énergie peut souvent simplifier la tâche consistant à obtenir les équations du mouvement, mais cela ne résout pas la difficulté liée à la non-unicité de la forme des équations du mouvement dans des coordonnées différentes.

Les énergies cinétique et potentielle s'écrivent d'abord en termes de  $(x, y)$  :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad U = mgy \quad (3.12)$$

En exprimant les énergies en fonction de la coordonnée effective  $\theta$  :

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\theta}^2 \quad (3.13)$$

Ainsi, les énergies deviennent :

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2, \quad U = -mgl \cos \theta \quad (3.14)$$

L'énergie mécanique totale  $E = T + U$  est conservée :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{constant} \quad (3.15)$$

En dérivant par rapport au temps et en simplifiant, on retrouve l'équation du mouvement :

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl \sin \theta \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3.16)$$

Ceci coïncide avec le résultat précédent obtenu en utilisant les équations de Newton.

Vous remarquerez que le mouvement du système est décrit par une unique coordonnée effective  $\theta$ . Pourtant, le problème initial est défini en termes de trois coordonnées cartésiennes. Nous avons éliminé la coordonnée  $z$  en supposant que le pendule oscille dans un plan vertical, ce qui peut sembler un choix ad hoc. En effet, si le pivot permettait au pendule d'osciller dans un plan vertical arbitraire, alors le choix du plan dans lequel le mouvement a lieu serait déterminé par les conditions initiales du système. Ensuite, nous avons introduit la force de tension  $\mathbf{T}$ , qui est inconnue et nécessaire pour contrebalancer la composante de la force gravitationnelle le long de la direction de la tige ; sans cela, le mouvement se produirait aussi dans la direction radiale et la tige ne conserverait pas une longueur constante. Remarquez que la force de tension peut être déterminée à chaque instant à partir de la solution des équations du mouvement, en utilisant Eq. (3.6). La force de tension prend donc à tout instant les valeurs qui garantissent que l'accélération radiale est nulle et que la contrainte est satisfaite.

Bien que le pendule simple soit une application très simple et intuitive de la seconde loi de Newton, il permet d'illustrer deux difficultés dans la dérivation de l'équation du mouvement pour les coordonnées effectives. En partant des équations du mouvement (3.6) pour les coordonnées cartésiennes, il n'est pas immédiatement évident (i) quel est l'ensemble minimal de coordonnées nécessaire pour décrire le système, ni (ii) quelle sera la forme des équations du mouvement dans ces coordonnées. La dérivation de ces équations passe par l'introduction de forces de contrainte, puis par leur élimination des équations du mouvement, ce qui n'est pas toujours immédiat.

## 3.2 Référentiels non inertiels et forces fictives

Une complication supplémentaire dans l'application des équations de Newton apparaît lorsque l'on travaille dans des référentiels non inertiels, qui peuvent parfois être préférables pour décrire le mouvement du système.

Dans des coordonnées non inertiales, les équations de Newton prennent la forme :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} + \mathbf{f}_f + \mathbf{f}, \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{R}$  représente la somme des forces de contrainte,  $\mathbf{f}_f$  la somme des forces fictives, et  $\mathbf{f}$  la somme de toutes les forces physiques connues.

En général, les forces fictives ne sont pas connues à l'avance. Par exemple, la force de Coriolis  $\mathbf{f}_{\text{cor}} = 2m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$  (où  $\boldsymbol{\omega}$  est la vitesse angulaire du référentiel non inertiel) dépend de la vitesse de la particule relativement à ce référentiel.

### Exemple 3.1.

Considérons un pendule sur un plan en rotation. Une masse ponctuelle est contrainte de se déplacer le long d'un cercle vertical de rayon  $r$  centré à l'origine. Il s'agit de déterminer le mouvement de la masse lorsque le cercle tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes dans le référentiel non inertiel où le cercle est immobile : l'axe  $x$  est perpendiculaire au plan du cercle, l'axe  $y$  est le long du diamètre horizontal, et l'axe  $z$  est aligné avec le diamètre vertical. Les équations de Newton dans ce référentiel sont :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_2 - 2mv\omega \sin \theta, \\ m\ddot{y} &= -R_1 \cos \theta + m\omega^2 r \cos \theta, \\ m\ddot{z} &= -mg - R_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $R_1$  est la force de contrainte radiale,  $R_2$  est la force de contrainte perpendiculaire au plan du cercle, et  $\theta$  est l'angle polaire dans le plan  $y$ - $z$ , avec  $y = r \cos \theta$  et  $z = r \sin \theta$ .

Pour déterminer le mouvement, nous éliminons d'abord les forces de contrainte. La condition pour que la masse reste sur le cercle impose  $\ddot{x} = 0$  et  $R_2 = 2mv\omega \sin \theta$ . En éliminant  $R_1$  des équations restantes, on obtient :

$$\ddot{z} \cos \theta - \ddot{y} \sin \theta = -g \cos \theta - \omega^2 r \sin \theta \cos \theta. \quad (3.19)$$

Exprimée en coordonnées polaires, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{r}\right) \cos \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (3.20)$$

Ces exemples montrent que les difficultés de l'approche newtonienne en coordonnées cartésiennes proviennent de deux causes principales :

- i) Les coordonnées sont redondantes et non indépendantes, ce qui fait apparaître des forces de contrainte inconnues;
- ii) Les équations de Newton ne possèdent pas de propriétés de transformation simples sous des changements de coordonnées dépendant du temps, ce qui entraîne des forces fictives inconnues dans les référentiels non inertiels.

Cela conduit à plusieurs questions importantes :

1. Est-il possible de formuler les problèmes mécaniques directement à l'aide du seul ensemble minimal de variables nécessaire pour décrire le mouvement, évitant ainsi le processus complexe d'élimination des contraintes ?
2. Peut-on établir des équations du mouvement qui conservent leur forme lors de changements de coordonnées ?
3. Existe-t-il une formulation de la mécanique qui ne nécessite pas de distinguer entre référentiels inertiels et non inertiels ?

Comme il sera montré, l'approche lagrangienne relève les défis posés par les forces de contrainte et les forces fictives, apporte des réponses affirmatives à toutes les questions ci-dessus, et offre une méthode très efficace pour résoudre les problèmes dynamiques.

## Chapter 4

# Équations de Lagrange

### 4.1 Degrés de liberté et coordonnées lagrangiennes

Considérons un système mécanique dont les positions sont entièrement décrites par  $N$  coordonnées cartésiennes tridimensionnelles  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  (par exemple, la position d'un solide rigide est entièrement identifiée par trois points non colinéaires). Elles correspondent aux  $3N$  composantes cartésiennes

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, \quad (4.1)$$

qui, pour simplifier la suite, seront notées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N$ .

En général, lorsqu'il existe des contraintes, tous les  $x_i$  ne sont pas indépendants et l'on note  $q_1, q_2, \dots, q_n$  un nombre minimal de « coordonnées » (en général non cartésiennes) nécessaires pour caractériser les positions du système (contraint).

Le nombre  $n$  est appelé le **nombre de degrés de liberté** du système et, par concision, un ensemble minimal de coordonnées  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sera appelé un ensemble de **coordonnées lagrangiennes**.

À la différence des coordonnées cartésiennes, utilisées dans les équations du mouvement de Newton, les coordonnées lagrangiennes fournissent la description la plus économique du système ; la question fondamentale est donc de déterminer directement leur évolution temporelle sans avoir à la déduire de la solution de l'évolution temporelle des coordonnées cartésiennes.

C'est l'objet de la formulation lagrangienne qui sera discutée ci-dessous.

### 4.2 Changement de coordonnées et dépendance temporelle explicite

Si, à un instant  $t$ ,  $\{q_i\}$  est un ensemble quelconque (pas nécessairement minimal) de coordonnées qui identifient la position du système, les coordonnées cartésiennes  $x_i$  à l'instant  $t$  peuvent s'exprimer en fonction des  $q_i$  :

$$x_i(t) = x_i(q(t), t), \quad (4.2)$$

(où  $q$  désigne l'ensemble des  $q_i$ ) avec, éventuellement, une dépendance explicite en  $t$  dans ces relations. Réciproquement, puisque les coordonnées cartésiennes déterminent complètement la position du système, elles doivent déterminer les  $q_i$ , ce qui implique que les eqs. (4.2) ci-dessus sont inversibles :

$$q_i(t) = q_i(x(t), t). \quad (4.3)$$

Dans la suite, nous supposons toujours suffisamment de régularité pour garantir l'existence des dérivées utilisées ci-dessous. On rappelle que la dérivée totale  $\dot{x}_i$  de  $x_i(t)$  reçoit à la fois la contribution de la dépendance temporelle de  $x_i$  via la dépendance temporelle de  $q_j$  et la contribution de la dépendance temporelle explicite des relations (4.2) :

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (4.4)$$

où, comme souvent dans la suite, la sommation sur les indices répétés est implicite.

Comme  $\partial x_i(q, t)/\partial q_j$  est une fonction de  $q$  et de  $t$ , mais pas de  $\dot{q}$ , on a

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m}, \quad (4.5)$$

relation qui sera très utile par la suite.

Une dépendance temporelle explicite dans le changement de coordonnées apparaît lorsqu'on considère des référentiels non inertiels.

Ceci est clairement illustré par le système discuté dans l'Exemple 3.1. En effet, la position du point sur le cercle est identifiée par l'angle  $\theta$  des coordonnées polaires dans le cercle ( $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ ), c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté, et la relation entre les coordonnées cartésiennes  $x', y', z'$  dans un référentiel (inertiel) fixe  $\mathcal{R}'$  et la coordonnée lagrangienne  $\theta$  dépend du temps :

$$x'(t) = r \sin \theta(t) \cos(\omega t), \quad (4.6)$$

$$y'(t) = r \sin \theta(t) \sin(\omega t), \quad (4.7)$$

$$z'(t) = r \cos \theta(t), \quad (4.8)$$

où l'on a explicitement indiqué que la correspondance  $x', y', z' \rightarrow \theta$  à l'instant  $t$  fait intervenir la dépendance temporelle des variables.

### 4.3 Forme lagrangienne des équations de Newton

Dans cette section, nous montrons que les équations de Newton en coordonnées cartésiennes (dont le nombre est  $3N$  pour  $N$  particules) peuvent s'écrire sous une forme qui s'avère aussi valable pour des variables génériques  $q_i$ , en particulier pour les (minimales) coordonnées lagrangiennes.

Nous considérons le cas de forces conservatives :

$$m_i \ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (4.9)$$

(pas de somme sur les indices répétés).

En notant  $T$  l'énergie cinétique

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2, \quad (4.10)$$

on obtient

$$m_i \ddot{x}_i = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}, \quad (4.11)$$

et les eqs. (4.9) peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (4.12)$$

Comme le potentiel n'est pas une fonction de  $\dot{x}_i$ , on a  $\partial V/\partial \dot{x}_i = 0$ , et  $T$  est uniquement une fonction des  $\dot{x}_i$ . Les eqs. (4.9) peuvent donc également s'écrire

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad L \equiv T - V, \quad i = 1, \dots, 3N.} \quad (4.13)$$

$L$  est appelée la fonction lagrangienne, ou *lagrangien*, et les eqs. (4.13) sont les équations du mouvement sous forme lagrangienne, dites équations de Lagrange en coordonnées cartésiennes.

Jusqu'ici, cela peut sembler n'être qu'une réécriture formelle des équations de Newton, sans avantage apparent ; mais, comme on va le voir ci-dessous, le gain substantiel par rapport aux équations de Newton (en coordonnées cartésiennes) est que les équations de Lagrange valent pour *n'importe* quel choix de coordonnées décrivant les configurations du système, *les lagrangiens écrits dans des coordonnées différentes étant définis par la condition de prendre la même valeur en des points correspondants*.

## 4.4 Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange que nous allons dériver ont la propriété essentielle de ne pas dépendre de l'usage de coordonnées cartésiennes, ni de l'usage de coordonnées d'un référentiel inertiel ; elles gardent la même forme pour tout choix de coordonnées  $q_i$  (*covariance des équations de Lagrange sous des changements arbitraires de coordonnées*).

Comme précédemment, nous considérons le cas de forces conservatives ; nous commençons par dériver les relations suivantes (en supposant toujours la régularité/différentiabilité nécessaire) en utilisant les eqs. (4.2), (4.4), (4.5) :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (4.14)$$

où, pour le second membre de (4.14), on a utilisé l'eq. (4.5).

Alors

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \left( m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} + m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (4.15)$$

et, pour la dernière égalité de (4.15), on a utilisé

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}, \quad (4.16)$$

en vertu de la possibilité d'échanger l'ordre des dérivées partielles.

En introduisant les composantes de la *force généralisée*

$$Q_j \equiv \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (4.17)$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j. \quad (4.18)$$

Les forces généralisées sont conservatives (c'est-à-dire qu'elles sont les dérivées partielles du potentiel par rapport aux  $q_i$ ) si les  $F_i$  le sont :

$$Q_j = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (4.19)$$

avec  $V$  indépendant des  $\dot{x}_j$ , et donc des  $\dot{q}_j$ .

Dans ce cas, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j}. \quad (4.20)$$

Ainsi, on obtient les **équations de Lagrange** pour le *lagrangien*  $L$  :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad L \equiv T - V, \quad j = 1, \dots, n.} \quad (4.21)$$

Il convient de souligner les avantages cruciaux des équations de Lagrange par rapport aux équations de Newton :

- (a) **description la plus économique** : l'évolution temporelle du système peut être décrite par les équations de Lagrange pour l'ensemble minimal de variables nécessaires à la description du système, de sorte qu'il n'y a ni coordonnées redondantes, ni forces de contrainte ;
- (b) **covariance ou invariance de forme des équations de Lagrange** : les équations de Lagrange ont la même forme, c'est-à-dire sont *invariantes de forme*, pour tout choix de coordonnées, y compris relatives à des référentiels non inertiels ; il n'y a donc pas de problème de forces fictives (leur effet est automatiquement pris en compte via l'expression du lagrangien comme fonction des coordonnées dépendant du temps) ; de manière générale, l'une des motivations majeures de la formulation lagrangienne de la mécanique est que **le lagrangien se transforme comme un scalaire sous les transformations de coordonnées**

$$q(t) \rightarrow q'(q(t), t), \quad \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}'(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (4.22)$$

à savoir

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t); \quad (4.23)$$

(pour la simplicité, dans l'équation ci-dessus la dépendance temporelle des coordonnées n'a pas été explicitée) ;

- (c) la formulation du problème dynamique en termes d'équations d'évolution se ramène à la spécification d'une **unique fonction scalaire** (le lagrangien) qui **encode toute l'information pertinente**, les équations du mouvement s'obtenant simplement à partir de ses dérivées.

À l'inverse, les équations de Newton (en coordonnées cartésiennes) ne sont pas invariantes de forme sous les changements de coordonnées ; en particulier, des termes nouveaux et substantiels apparaissent dans le cas des référentiels non inertiels ; de plus, la description du mouvement en coordonnées redondantes conduit à l'apparition de forces de contrainte a priori inconnues.

**Remarque 4.1.** On peut vérifier explicitement que la présence de forces de contrainte dues à des contraintes holonomes ne modifie pas l'eq. (4.18), avec  $Q_j = -\partial V / \partial q_j$ , puisque le choix des coordonnées lagrangiennes  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , avec  $n$  le nombre de degrés de liberté, implique que les composantes  $Q_j^c$  des forces généralisées correspondant aux forces de contrainte sont nulles.

À cette fin, rappelons que des contraintes holonomes portant sur les  $N$  coordonnées cartésiennes décrivant la position du système s'expriment par des conditions de la forme

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (4.24)$$

et que les forces de contrainte  $F_i^c$  peuvent s'écrire comme des combinaisons appropriées des vecteurs  $\partial f_\alpha / \partial x_i$  orthogonaux aux surfaces  $f_\alpha(x, t) = 0$  :

$$F_i^c = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (4.25)$$

Introduisons des nouvelles variables :

$$\xi_i(t) \equiv f_i(x, t), \quad i = 1, \dots, k; \quad (4.26)$$

$$\xi_{j+k} = q_j, \quad j = 1, \dots, 3N - k, \quad (4.27)$$

( $n = 3N - k$  étant le nombre de degrés de liberté). Remarquez que les  $\xi_i$ , pour  $i = 1, \dots, k$ , définissent en changement de coordonnées qui dépend explicitement du temps. On peut maintenant écrire les forces généralisées correspondant aux forces de contrainte en utilisant l'expression (4.17) :

$$\begin{aligned} Q_j^c &= \sum_i F_i^c \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial q_j} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que les  $q_j$ , en tant que coordonnées lagrangiennes, sont indépendantes des contraintes, c'est-à-dire que, à temps fixe,  $\partial f_\alpha(x, t) / \partial q_j = 0$ , ce qui implique  $\partial \xi_\alpha / \partial q_j = 0$ .

**Remarque 4.2.** La covariance des équations de Lagrange sous un changement de coordonnées est implicite dans la dérivation des eqs. (4.21), où les  $q_i$  sont des fonctions (régulières) *arbitraires* des coordonnées cartésiennes et où le lagrangien en fonction de celles-ci a été défini par

$$L(q, \dot{q}, t) = L_C(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t), \quad (4.29)$$

où  $L_C$  désigne la (fonction) lagrangienne des coordonnées cartésiennes.

Ainsi, l'équation (4.23) énonce que *les lagrangiens  $L(q, \dot{q}, t)$  et  $L_C(x, \dot{x}, t)$  prennent la même valeur lorsque leurs arguments décrivent des points correspondants.*

## 4.5 Les équations de Lagrange en action

Nous allons vérifier l'efficacité de l'approche lagrangienne sur quelques exemples simples.

**Exemple 4.1.** Comme premier exemple, nous reprenons le problème, discuté dans l'Exemple 3.1, où l'approche newtonienne conduit à l'apparition de forces de contrainte et de forces fictives. Il s'agit de décrire le mouvement d'un pendule sur un plan en rotation. Une masse ponctuelle est contrainte de se déplacer le long d'un cercle vertical de rayon  $r$  centré à l'origine et de déterminer le mouvement de la masse lorsque le cercle tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Dans l'approche lagrangienne, il est commode d'utiliser des coordonnées lagrangiennes, c'est-à-dire un ensemble minimal de coordonnées. Dans ce cas, on peut choisir, par exemple, l'angle  $\theta$ , correspondant à l'angle polaire dans le plan ( $y - z$ ) du cercle, ainsi que ses dérivées temporelles. De plus, pour décrire le mouvement imposé du cercle, nous introduisons l'angle polaire  $\alpha$  dans le plan  $x - y$ . Ainsi, en omettant la dépendance temporelle des coordonnées  $x, y, z, \theta$  indiquée dans la discussion de l'Exemple 3.1, nous avons :

$$x = r \cos \theta \cos \alpha, \quad y = r \cos \theta \sin \alpha, \quad z = r \sin \theta, \quad \dot{\alpha} = \omega, \quad (4.30)$$

et

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2), \quad V = mgr \sin \theta. \quad (4.31)$$

Les équations de Lagrange donnent immédiatement l'équation (3.20)

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{r}\right) \cos \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (4.32)$$

sans qu'il soit nécessaire de se préoccuper des forces de contrainte et des forces fictives. En effet, comme discuté dans la Remarque 4.1, *l'utilisation des coordonnées lagrangiennes élimine les forces de contrainte des équations du mouvement.*

Finalement, l'intensité des forces de contrainte (nécessaires pour maintenir le mouvement contraint, par exemple la réaction du cercle dans l'exemple ci-dessus) peut être calculée à la fin, une fois le mouvement résolu, en exploitant la relation entre les coordonnées lagrangiennes et les coordonnées cartésiennes (voir eq. (8.17)) :

$$\begin{aligned} R_1 &= mr(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos^2 \theta) - mg \sin \theta, \\ R_2 &= 2mv\omega \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.33)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de la masse dans le référentiel non-inertiel, et  $v = |\mathbf{v}|$

Un point instructif est de comprendre ce qui se passe en général pour les forces fictives dans l'approche lagrangienne, puisque dans les équations de Lagrange seules apparaissent les forces généralisées  $Q_j$ , qui correspondent aux forces non fictives.

Comme nous allons le voir ci-dessous, l'expression de l'énergie cinétique en termes de coordonnées liées à un référentiel non inertiel rend pleinement compte de l'effet des forces fictives. Ainsi, l'origine des forces fictives se réduit à un ingrédient purement cinématique, encodé dans la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées lagrangiennes correspondant à un référentiel non inertiel.

Ce fait est clairement illustré par l'exemple simple suivant.

**Exemple 4.2.** Considérons un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  décrit par les axes cartésiens  $x, y, z$  et le référentiel non inertiel  $\mathcal{R}'$  correspondant à des rotations de vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $z$ .

La relation entre les coordonnées cartésiennes d'un point matériel dans les deux référentiels est :

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \quad y = y' \cos \omega t + x' \sin \omega t, \quad z = z' \quad (4.34)$$

et un simple calcul donne :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + m\omega(y'\dot{x}' - x'\dot{y}') + \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2). \quad (4.35)$$

Ainsi, l'expression de l'énergie cinétique en termes de coordonnées relatives au référentiel non inertiel contient des termes supplémentaires, au-delà du terme quadratique standard en les vitesses, et ces termes dépendent également des coordonnées  $x', y'$ .

Le résultat est que les forces fictives apparaissent dans les équations de Lagrange à travers les dérivées de  $T$  par rapport à  $x', \dot{x}', y', \dot{y}'$ , un rôle crucial étant joué par l'invariance de forme du lagrangien, équation (4.23). En fait, on a

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = m\omega \dot{y}' + m\omega^2 x', \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}'} = m\ddot{x}' - m\omega \dot{y}'. \quad (4.36)$$

Ainsi, la moitié de la composante selon  $x'$  des forces de Coriolis apparaît dans la première équation, avec une partie de la force centrifuge, et l'autre moitié dans la seconde équation. Des contributions similaires apparaissent dans la dérivée de  $T$  par rapport à  $y', \dot{y}'$ .

En utilisant la relation entre les coordonnées polaires dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\rho' = \rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi - \omega t,$$

(avec  $\cos \theta = z/\rho$ ), l'énergie cinétique  $T$  prend la forme suivante en coordonnées polaires relatives à  $\mathcal{R}$  et à  $\mathcal{R}'$  :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2 \theta (\dot{\varphi}' + \omega)^2]. \quad (4.37)$$

Ainsi, en termes de coordonnées relatives au référentiel en rotation, le lagrangien diffère des termes quadratiques standards par la présence des termes :

$$L'_z \omega + \frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2, \quad L'_z = m\rho^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}'.$$

L'expression ci-dessus pour  $T$  en termes de coordonnées relatives au référentiel non inertiel  $\mathcal{R}'$  peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$T = \frac{1}{2}mv'^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}' + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')^2, \quad (4.38)$$

montrant que, dans un référentiel en rotation, l'énergie cinétique acquiert deux termes additionnels : i) un couplage vectoriel entre la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  du référentiel en rotation et le moment cinétique  $\mathbf{L}'$  dans  $\mathcal{R}'$ , et ii) un terme centrifuge.

En conclusion, les forces fictives apparaissent dans la définition de l'énergie cinétique en termes de coordonnées non inertielles, en exploitant l'invariance de forme du lagrangien.

**Exemple 4.3.** Nous allons étudier la déviation vers l'est d'un objet en chute libre. Considérons une particule de masse  $m$  en chute libre depuis la hauteur  $h$  à l'équateur. La symétrie du système suggère d'utiliser des coordonnées cylindriques  $\rho, \varphi, z$ , avec  $\rho$  la distance au centre de la Terre, l'axe  $z$  correspondant à l'axe de rotation de la Terre, et en posant  $z = 0$  à l'équateur. Dans le référentiel non inertiel  $\mathcal{R}'$  où la Terre est au repos, avec coordonnées données par  $\rho' = \rho, \varphi' = \varphi - \omega t$ , en notant  $R$  le rayon terrestre, on a :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - mg(\rho - R) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2(\dot{\varphi}' + \omega)^2) - mg(\rho - R). \quad (4.39)$$

Les équations de Lagrange donnent :

$$\rho^2(\dot{\varphi}' + \omega) = C, \quad \ddot{\rho} = -g + \rho(\dot{\varphi}' + \omega)^2. \quad (4.40)$$

La première équation découle de  $\partial L/\partial \varphi' = 0$  et la constante  $C$  est déterminée par les conditions initiales  $\rho(0) = \rho_0, \dot{\varphi}'(0) = 0$ , c'est-à-dire  $C = \rho_0^2 \omega$ . La seconde équation devient alors :

$$\ddot{\rho} = -g + \omega^2 \rho_0^4 \rho^{-3}. \quad (4.41)$$

Comme  $\omega = 7.3 \times 10^{-5}$  rad/s et  $g \gg \omega^2 \rho_0^4 / \rho^3$ , le second terme de l'équation ci-dessus peut être négligé avec une très bonne approximation, donnant  $\rho(t) = \rho_0 - \frac{1}{2}gt^2$ . Ainsi, l'équation pour  $\varphi$  devient :

$$\dot{\varphi}' = \omega \left( \frac{\rho_0^2}{\rho^2} - 1 \right) \sim 2\omega \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \omega g \frac{t^2}{\rho_0}. \quad (4.42)$$

Elle se résout facilement :

$$\varphi' = \frac{1}{3}\omega g \frac{t^3}{\rho_0} \sim \frac{1}{3}\omega \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} > 0, \quad (4.43)$$

en ayant utilisé que le temps  $t$  nécessaire pour atteindre le sol terrestre est donné par  $t = \sqrt{2h/g}$ . En conclusion, la déviation par rapport à la verticale est vers l'est et, à une bonne approximation, donnée par :

$$\rho_0\varphi' = \frac{1}{3}\omega g(2h/g)^{3/2}. \quad (4.44)$$

Une discussion en termes des équations de Newton avec coordonnées cartésiennes aurait été beaucoup moins simple, ainsi que le contrôle des approximations.

**Exemple 4.4.** Considérons le pendule de Foucault. Le problème est de déterminer la variation du plan d'oscillation d'un pendule due à la rotation de la Terre (de vitesse angulaire  $\omega$ ). Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où la Terre est au repos, il est commode de choisir l'axe  $z$  le long de la verticale du pendule et les coordonnées polaires  $r, \alpha$  dans le plan orthogonal tangent au sol terrestre. Selon l'équation (4.38), en négligeant les termes en  $\omega^2$ , ainsi que les termes d'ordre  $1 - (z/l)^2$ , avec  $l$  la longueur du pendule, l'énergie cinétique  $T$  prend la forme :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2(\dot{\alpha} + \omega')^2), \quad (4.45)$$

où  $\omega'$  est la composante de la vitesse angulaire  $\omega$  le long de l'axe  $z$ .

De plus, si le mouvement est décrit en coordonnées du plan  $x - y$ , la force gravitationnelle est décrite par un potentiel :

$$V = -\frac{1}{2} \left(\frac{mg}{l}\right) r^2. \quad (4.46)$$

Cela peut s'expliquer par le fait que la force de contrainte nécessaire pour équilibrer la force gravitationnelle a une composante  $\mathbf{R}$  dans le plan  $x - y$ , donnée par  $mgr/l$  pour de petits angles d'oscillation ; ainsi,  $\mathbf{R}$  est conservative et décrite par le potentiel  $V$ . Ainsi, le lagrangien coïncide avec celui d'un oscillateur harmonique bidimensionnel écrit en coordonnées polaires dans un référentiel en rotation (avec vitesse angulaire  $\omega'$ ), et la solution est :

$$r(t) = r_0(t), \quad \alpha(t) = \alpha_0(t) - \omega't. \quad (4.47)$$

Ainsi, le plan des oscillations du pendule tourne avec une vitesse angulaire (constante)  $\omega'$  ; à l'équateur  $\omega' = 0$  et il n'y a pas de rotation du plan, tandis qu'au pôle nord  $\omega' = \omega$ . Il convient de noter que la discussion en termes des équations de Newton en coordonnées cartésiennes, avec l'apparition de forces de contrainte et de forces fictives, serait bien plus lourde ; en particulier, la possibilité d'écrire facilement le lagrangien dans différentes coordonnées a été d'une grande aide pour la résolution du problème.

## 4.6 Potentiel généralisé

La dérivation ci-dessus des équations de Lagrange sous la condition de forces conservatives peut être généralisée au cas où il existe une fonction  $U = U(q, \dot{q}, t)$ , telle que les forces généralisées puissent s'écrire sous la forme suivante :

$$Q_j \equiv \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (4.48)$$

En fait, en partant de l'éq. (4.18) et en remplaçant  $Q_j$  par l'expression ci-dessus, on voit immédiatement que les équations de Lagrange sont valides pour le lagrangien

$$L \equiv T - U, \quad (4.49)$$

le cas des forces conservatives étant inclus comme cas particulier.

Cette remarque apparemment formelle permet la formulation lagrangienne du mouvement dans des cas plus généraux que celui des forces conservatives dérivées d'un potentiel dépendant des seules positions. L'exemple le plus important est celui d'un *électron en présence d'un champ électromagnétique* ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ), dont les forces correspondantes ne peuvent pas être dérivées d'un potentiel  $V = V(x)$ .

Commençons par montrer que l'équation (4.48) est valable pour des coordonnées cartésiennes. L'expression de la force de Lorentz en fonction de la position et de la vitesse de l'électron est  $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}/c \wedge \mathbf{B})$ , où  $-e$  est la charge de l'électron. Les équations du mouvement de l'électron s'écrivent donc :

$$m\ddot{x}_i = e(E_i + \epsilon_{ijk}(v_j/c)B_k) \equiv F_i, \quad (4.50)$$

où  $c$  désigne la vitesse de la lumière, la sommation sur les indices répétés est implicite et  $\epsilon_{ijk}$  est le tenseur totalement antisymétrique (de Levi-Civita), avec  $\epsilon_{123} = 1$ . En termes de potentiels électromagnétiques scalaire et vectoriel ( $\phi, \mathbf{A}$ ), on a :

$$E_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad B_i = (\nabla \wedge \mathbf{A})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}. \quad (4.51)$$

Puis, en introduisant :

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \equiv e\left(\phi(\mathbf{x}, t) + \sum_i \frac{\dot{x}_i}{c} A_i(\mathbf{x}, t)\right), \quad (4.52)$$

et en utilisant

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}, \quad (4.53)$$

et

$$\sum_i \dot{x}_i (\nabla \wedge \mathbf{A})_i = \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i},$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} = -e \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{e}{c} \frac{dA_j}{dt} - \frac{e}{c} \dot{x}_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = F_j. \quad (4.54)$$

Une propriété très importante est que les équations (4.48) sont valables pour tout choix de coordonnées. En effet, d'après l'équation (4.17), on a  $Q_j = F_i \partial x_i / \partial q_j$  (la sommation sur l'indice  $i$  est implicite) :

$$\begin{aligned} Q_j &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ici, dans la troisième égalité, nous avons utilisé les équations (4.5), (4.16) et le fait que la dépendance de  $U$  en  $\dot{q}_i$  se fait uniquement à travers  $x_i$  (équation (4.4)).

**Exemple 4.5.** Considérons un champ magnétique statique, sans champ électrique :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0.$$

Le potentiel généralisé correspondant s'écrit alors

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i(\mathbf{x}), \quad (4.56)$$

et en coordonnées généralisées

$$U(q, \dot{q}) = \frac{e}{c} \dot{q}_j A_i(x(q)) \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (4.57)$$

Avec le lagrangien  $L = T - U$ , les équations d'Euler-Lagrange donnent la force de Lorentz (purement magnétique) sous forme cartésienne

$$m \ddot{x}_i = \frac{e}{c} \epsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k \quad \Longleftrightarrow \quad m \ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}. \quad (4.58)$$

Comme la force magnétique est orthogonale à la vitesse,

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{e}{c} (\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (4.59)$$

elle ne fournit aucun travail et l'énergie cinétique est conservée :  $\dot{T} = 0$ .

**Cas d'un champ uniforme  $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$ .** En jauge symétrique  $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ ,

$$U(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{eB}{2c} (x \dot{y} - y \dot{x}), \quad L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{eB}{2c} (x \dot{y} - y \dot{x}), \quad (4.60)$$

et le mouvement dans le plan  $(x, y)$  est de type cyclotron, c.-à-d. circulaire uniforme, avec rayon de Larmor  $r_c = \frac{mcv}{eB}$  et pulsation  $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ .

La possibilité d'écrire les équations du mouvement d'une particule chargée en présence d'un champ électromagnétique en termes de coordonnées arbitraires et le fait que les équations de Lagrange correspondantes soient covariantes sous des transformations de coordonnées simplifie grandement les changements de référentiels et, par conséquent, le traitement des problèmes électrodynamiques. En particulier, les propriétés de transformation des champs électrique et magnétique lors d'un changement de référentiel sont automatiquement prises en compte en écrivant le lagrangien, en particulier le potentiel électromagnétique  $U$ , comme une fonction des nouvelles coordonnées.

## 4.7 Signification physique des équations de Lagrange : moments conjugués

Pour mieux saisir l'utilité de la formulation lagrangienne, il est utile de discuter la signification physique des équations de Lagrange.

Dans le cas simple d'un système sans contraintes soumis à des forces conservatives décrites par des coordonnées cartésiennes inertielles, les équations de Lagrange peuvent s'écrire comme :

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \quad (4.61)$$

Puisque dans ce cas  $p_i$  est la quantité de mouvement  $m_i \dot{x}_i$  associée à la coordonnée  $x_i$ , les équations de Lagrange expriment simplement que la variation de  $p_i$  est gouvernée par la force  $\partial L / \partial x_i$  dans la direction  $i$ .

Dans le cas général, en définissant le *moment conjugué* à  $q_i$  :

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4.62)$$

on a une interprétation analogue : les équations de Lagrange affirment que la variation temporelle du moment conjugué  $p_i$  est gouvernée par la force généralisée  $\partial L / \partial q_j$ .

Il convient de noter que des contributions aux forces généralisées peuvent également provenir du terme cinétique  $T$ , comme nous l'avons vu dans le cas de coordonnées cartésiennes non inertielles (Exemple 4.1).

Afin de mieux apprécier la signification physique des moments conjugués, discutons quelques exemples simples.

**Exemple 4.6.** Considérons une particule dans un potentiel central  $V$ . La symétrie sphérique suggère d'utiliser des coordonnées sphériques :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (4.63)$$

Alors, l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (4.64)$$

et les moments conjugués sont :

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (4.65)$$

ils ont une interprétation physique simple :

1)  $p_r$  représente le moment radial, et

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial r}; \quad (4.66)$$

2)  $p_\varphi$  est la composante  $z$  du moment cinétique  $L_z$ , qui est conservée puisque  $\partial L / \partial \varphi = 0$  (correspondant à l'annulation du moment de la force par rapport à l'axe  $z$ ).

Il est commode de choisir l'axe  $z$  le long du vecteur  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  à l'instant initial, de sorte que  $\theta(0) = 0$  et, par l'équation de conservation (en omettant d'explicitier la dépendance temporelle des variables) :

$$L_z = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = L_z(0) = 0. \quad (4.67)$$

Si  $\theta(0) = 0 = \dot{\theta}(0)$ , alors, en utilisant  $L_z = 0$ , les équations de Lagrange donnent :

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0, \quad (4.68)$$

ce qui implique  $r^2\dot{\theta} = r^2(0)\dot{\theta}(0) = 0$ , donc  $\dot{\theta}(t) = 0$  et le mouvement se fait le long de l'axe  $z$ . En dehors de ce cas très particulier, si  $\sin(\theta(t)) \neq 0$ , l'équation  $L_z = 0$  implique que  $\dot{\varphi} = 0$ , donc le mouvement se fait dans le plan  $\varphi = 0$ . Dans ce cas,  $p_\theta$  décrit le moment cinétique (orbital) de la particule par rapport au plan de son mouvement, et par l'équation de Lagrange :

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (4.69)$$

$p_\theta$  est une constante du mouvement (*deuxième loi de Kepler*).

La dérivation de ces résultats serait moins directe en utilisant les équations de Newton en coordonnées cartésiennes. L'avantage de l'approche lagrangienne réside dans la formulation directe du problème dynamique en coordonnées sphériques, qui sont les plus appropriées pour un problème à symétrie sphérique. En effet, les forces lagrangiennes (généralisées) correspondantes ont une signification physique directe, car elles décrivent les moments des forces, respectivement par rapport à l'axe  $z$  ( $M_z = \partial L / \partial \varphi$ ) et par rapport à la normale unitaire  $\mathbf{n}$  au plan  $\varphi = \text{constante}$  ( $M_n = \partial L / \partial \theta$ ). En fait, on a

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.70)$$

de sorte que

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -y \frac{\partial L}{\partial x} + x \frac{\partial L}{\partial y} = M_z. \quad (4.71)$$

De plus, en utilisant que  $\mathbf{n} = N \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{k}$ , avec  $\hat{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}/r$ ,  $\mathbf{k}$  le vecteur unitaire dans la direction de l'axe  $z$  et  $N = \sin \theta$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r (\cos \theta \cos \varphi \partial_x + \cos \theta \sin \varphi \partial_y - \sin \theta \partial_z) = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \wedge \nabla),$$

de sorte que  $\partial L / \partial \theta = M_n$ .

En conclusion, les équations de Lagrange :

- 1) permettent la description la plus simple du mouvement en termes de coordonnées lagrangiennes, qui tiennent compte des propriétés de symétrie du système ;
- 2) donnent directement les lois dynamiques pour les moments angulaires  $M_z, M_n$ , c'est-à-dire les équations cardinales de la mécanique ;
- 3) relie les lois de conservation ( $p_\varphi = \text{constante}$ ,  $p_\theta = \text{constante}$ ) aux symétries du lagrangien.

La description en coordonnées cartésiennes est moins transparente : dans ce cas, les lois de conservation ne font pas partie des équations du mouvement et doivent être dérivées séparément.

## 4.8 Principe de d'Alembert et déplacements virtuels

Nous dérivons ici les équations lagrangiennes de manière plus formelle à partir du *principe de d'Alembert*, qui fournit une formulation générale des contraintes, des forces de contrainte qui en résultent, et des coordonnées généralisées. Le principe repose sur le concept de *déplacement virtuel*, qui définit les variations infinitésimales de configuration admissibles, à chaque instant, au regard des contraintes.

En général, à chaque contrainte est associée une force de contrainte, inconnue a priori. Pour un système de  $N$  particules, résoudre les équations du mouvement revient à déterminer les  $3N$  coordonnées cartésiennes  $x_i(t)$  et les  $3N$  forces de contrainte  $F_i^c(t)$ ,  $i = 1, \dots, 3N$ . Si le système est soumis à  $k$  contraintes, nous disposons de  $3N$  équations du mouvement et de  $k$  équations de contrainte. Pour déterminer le mouvement des particules et les composantes des forces de contrainte (inconnues), il faut au total  $6N$  conditions. Les  $3N$  équations du mouvement et les  $k$  équations de contrainte fournissent  $3N + k$  conditions : il manque donc  $3N - k$  conditions pour fermer le système. Le principe de d'Alembert fournit précisément ces conditions supplémentaires en énonçant que les forces de contrainte ne font aucun travail virtuel. Cela conduit directement à la définition d'un ensemble minimal de coordonnées généralisées satisfaisant toutes les contraintes et à l'élimination des forces de contrainte inconnues des équations du mouvement.

### 4.8.1 Principe de d'Alembert.

Pour un système de particules de masses  $m_i$ , coordonnées cartésiennes  $x_i$  et forces appliquées  $F_i^a$ , on note  $F_i^c$  les forces de contrainte. Les équations de Newton s'écrivent

$$m_i \ddot{x}_i = F_i^a + F_i^c, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (4.72)$$

En réarrangeant,

$$F_i^a + F_i^c - m_i \ddot{x}_i = 0. \quad (4.73)$$

Le principe de d'Alembert affirme que le *travail virtuel* des « forces d'inertie »  $-m_i \ddot{x}_i$  ajoutées aux forces appliquées est nul pour tout *déplacement virtuel*  $\delta x_i$  compatible avec les contraintes :

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^a + F_i^c - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0. \quad (4.74)$$

Ce principe constitue le point de départ naturel pour dériver les équations lagrangiennes.

### 4.8.2 Définition du déplacement virtuel.

Un *déplacement virtuel*  $\delta x_i$  est une variation infinitésimale de configuration compatible avec les contraintes, prise à *temps fixé*. Si les contraintes sont

$$f_\alpha(x, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (4.75)$$

alors les déplacements virtuels admissibles satisfont

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}(x, t) \delta x_i = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (4.76)$$

On remarque qu'il n'y a *pas* de terme  $\partial f_\alpha / \partial t$  dans cette condition, puisque le temps est figé pendant le déplacement virtuel.

### 4.8.3 Interprétation intuitive.

Le qualificatif « virtuel » souligne que ces déplacements ne sont pas le mouvement infinitésimal *réel* du système sur un petit intervalle de temps, mais des déplacements hypothétiques le long de la surface de contrainte instantanée, à temps fixé :

- Pour des contraintes holonomes indépendantes du temps, les déplacements virtuels sont simplement tangents à la variété de contrainte.
- Pour des contraintes *rhéonomes* (dépendant du temps), la vitesse réelle du système peut avoir une composante selon la normale instantanée, afin de suivre la surface en mouvement. En revanche, les déplacements virtuels restent définis sur la surface « gelée » à l'instant considéré ; ils ne font intervenir que les gradients spatiaux  $\partial f_\alpha / \partial x_i$ .

Cette distinction est essentielle : elle garantit que les forces de contrainte, qui ne font aucun travail virtuel, doivent appartenir à l'espace engendré par les gradients  $\nabla_x f_\alpha$  à chaque instant, ce qui conduit naturellement à leur représentation via des multiplicateurs de Lagrange.

## 4.9 Dérivation des équations de Lagrange à partir du principe de d'Alembert

Considérons un système de  $N$  particules de masses  $m_i$  et de positions dans l'espace cartésien  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , de sorte que le nombre total de coordonnées cartésiennes est  $3N$ .

L'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2. \quad (4.77)$$

Soit  $q = (q_1, \dots, q_s)$  un ensemble de coordonnées généralisées tel que

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_s, t), \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (4.78)$$

On remarque qu'ici on ne fait pas nécessairement l'hypothèse que les coordonnées généralisées sont un ensemble minimal qui satisfait toutes les contraintes. Donc  $s$  peut être plus grand que le nombre  $3N - k$  de degrés de liberté effectifs du système, où  $k$  est le nombre de contraintes holonomes indépendantes. Dans ce cas général, on verra que des forces de contrainte généralisées apparaissent dans les équations de Lagrange.

Les vitesses généralisées sont reliées aux vitesses cartésiennes par

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (4.79)$$

À temps fixé, les déplacements virtuels sont

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (4.80)$$

### 4.9.1 Principe de d'Alembert en coordonnées cartésiennes.

Soient  $F_i^a$  les forces appliquées et  $F_i^c$  les forces de contrainte. Le principe de d'Alembert s'écrit

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^a + F_i^c - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0. \quad (4.81)$$

En substituant l'expression de  $\delta x_i$ ,

$$\sum_{j=1}^s \left[ \sum_{i=1}^{3N} (F_i^a + F_i^c - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (4.82)$$

### 4.9.2 Forces généralisées.

On définit les forces généralisées appliquées et de contrainte par

$$Q_j^a = \sum_{i=1}^{3N} F_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (4.83)$$

$$Q_j^c = \sum_{i=1}^{3N} F_i^c \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (4.84)$$

Alors

$$\sum_{j=1}^s \left( Q_j^a + Q_j^c - \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (4.85)$$

On rappelle que les contraintes sont définies par  $k$  équations qui, en coordonnées cartésiennes, sont

$$f_\alpha(x, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (4.86)$$

En utilisant le changement de coordonnées  $x_i = x_i(q, t)$ , elles s'écrivent en coordonnées généralisées

$$\Phi_\alpha(q, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (4.87)$$

où

$$\Phi_\alpha(q, t) \equiv f_\alpha(x(q, t), t). \quad (4.88)$$

En utilisant le fait que les forces de contrainte sont orthogonales aux surfaces de contrainte, on peut exprimer les forces généralisées de contrainte comme des combinaisons linéaires des gradients des fonctions de contrainte par rapport aux  $q_j$  :

$$Q_j^c = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}, \quad (4.89)$$

### 4.9.3 Identité impliquant l'énergie cinétique.

Nous affirmons que

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (4.90)$$

*Preuve.* Rappelons que

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2. \quad (4.91)$$

D'abord,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (4.92)$$

Comme

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (4.93)$$

on a

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (4.94)$$

et donc

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (4.95)$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \quad (4.96)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right). \quad (4.97)$$

En soustrayant, on obtient bien (4.90).  $\square$

#### 4.9.4 Forme généralisée du principe de d'Alembert.

En substituant (4.90) dans (4.85) on obtient

$$\sum_{j=1}^s \left( Q_j^a + Q_j^c - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right) \delta q_j = 0. \quad (4.98)$$

Or, dans l'Eq. (4.98), les coordonnées généralisées  $q_j$  ne constituent pas nécessairement un ensemble minimal : elles peuvent être liées par  $k$  contraintes holonomes

$$\Phi_\alpha(q, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (4.99)$$

et les déplacements virtuels correspondants doivent donc satisfaire les conditions linéaires

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (4.100)$$

Les  $\delta q_j$  ne sont donc pas indépendants, et l'on ne peut pas conclure directement à partir de (4.98) que chaque coefficient de  $\delta q_j$  doit s'annuler séparément.

La condition (4.100) définit un sous-espace du  $\mathbb{R}^s$ , constitué de tous les déplacements virtuels compatibles avec les contraintes. Notons

$$\mathcal{S} = \{ \delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^s \mid A \delta \mathbf{q} = 0 \}, \quad A_{\alpha j} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}.$$

L'équation (4.98) affirme alors que le vecteur

$$R_j = Q_j^a + Q_j^c - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right]$$

est orthogonal à tous les déplacements virtuels admissibles  $\delta \mathbf{q} \in \mathcal{S}$  :

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \in \mathcal{S}. \quad (4.101)$$

D'après un résultat élémentaire d'algèbre linéaire, le sous-espace orthogonal à  $\mathcal{S}$  est engendré par les gradients des contraintes, c'est-à-dire par les lignes de la matrice  $A$ . Il existe donc des coefficients  $\xi_\alpha$  tels que

$$R_j = \sum_{\alpha=1}^k \xi_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}. \quad (4.102)$$

En introduisant les  $\xi_\alpha$  par (4.102), l'équation (4.98) devient identiquement vérifiée pour tout déplacement virtuel admissible. On peut alors considérer de nouveau les  $\delta q_j$  comme indépendants, ce qui conduit à l'annulation de chaque coefficient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^a + Q_j^c + \sum_{\alpha=1}^k \xi_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (4.103)$$

On sait d'ailleurs que les forces de contrainte doivent aussi être orthogonales aux déplacements virtuels, et donc doivent être contenues dans le sous-espace  $\mathcal{S}$ . Il existe donc des coefficients  $\eta_\alpha$  tels que

$$Q_j^c = \sum_{\alpha=1}^k \eta_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_j}. \quad (4.104)$$

En introduisant les  $Q_j^c$  ainsi exprimées dans l'Eq. (4.103) on peut finalement écrire

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^a + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s. \quad (4.105)$$

où nous avons défini  $\lambda_{\alpha} = \eta_{\alpha} + \xi_{\alpha}$ .

Si une partie de la force appliquée dérive d'un potentiel  $U(q, t)$ , de sorte que  $Q_j^a = -\partial U / \partial q_j + Q_j^{(nc)}$  – ou dans le cas plus général où la force appliquée est exprimée en termes de potentiel généralisé  $U(q, \dot{q}, t)$  et  $Q_j^a = d(\partial U / \partial \dot{q}_j) / dt - \partial U / \partial q_j + Q_j^{(nc)}$  – alors avec le lagrangien  $L = T - U$  on obtient les *équations de Lagrange de première espèce* :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)} + \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, s,} \quad (4.106)$$

avec les contraintes

$$\Phi_{\alpha}(q, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (4.107)$$

Si les coordonnées généralisées sont choisies comme l'ensemble minimal de coordonnées indépendantes satisfaisant toutes les contraintes, alors les déplacements le long de ces coordonnées sont par définition tangents à la variété de contrainte  $\Phi_{\alpha} = 0$ , de sorte que les forces de contrainte ne font aucun travail virtuel et chaque dérivée partielle  $\partial \Phi_{\alpha} / \partial q_j$  est nulle. Par conséquent, dans ce cas particulier, il ne reste plus de forces de contrainte et les équations (4.106) se réduisent aux *équations de Lagrange de seconde espèce* :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)}, \quad j = 1, \dots, 3N - k,} \quad (4.108)$$

où nous avons remplacé  $s$  par  $3N - k$ , le nombre de degrés de liberté effectifs du système. Les forces non conservatives restantes  $Q_j^{(nc)}$  sont obtenues en exprimant les forces appliquées non conservatives en fonction des coordonnées généralisées.

#### 4.9.5 Variables cycliques, symétries et moments conjugués conservés

La discussion de la section précédente a montré que si le Lagrangien est indépendant de la coordonnée lagrangienne  $q_i$ , appelée alors *variable cyclique*, le moment conjugué correspondant  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  est une constante du mouvement :

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (4.109)$$

Comme l'illustrent clairement les exemples ci-dessus, l'existence de variables cycliques est liée aux propriétés de symétrie du système.

De manière générale, si  $q_i$  est une variable cyclique, la transformation

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + \lambda, \quad q_j \rightarrow q'_j = q_j, \quad j \neq i, \quad (4.110)$$

laisse le Lagrangien invariant :

$$L'(q', \dot{q}', t) \equiv L(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t) = L(q', \dot{q}', t),$$

et correspond donc à une *symétrie* du Lagrangien et du système.

Dans l'Exemple 4.6, le caractère cyclique de l'angle  $\varphi$  reflète l'invariance par rapport aux rotations autour de l'axe  $z$  et implique la conservation de  $L_z$ . L'angle  $\theta$  devient une variable cyclique pour le Lagrangien décrivant le mouvement dans le plan  $\varphi = \text{constante}$ , ce qui reflète l'invariance par rapport aux rotations autour de l'axe perpendiculaire à ce plan et implique la conservation de  $p_\theta$ .

Dans l'Exemple 4.4, le caractère cyclique de l'angle  $\theta$  codifie l'invariance sous les rotations autour de l'axe  $z$  (symétrie cylindrique).

**Exemple 4.7.** Pour une particule soumise à un potentiel  $V$ , la conservation de la quantité de mouvement  $p_1 = m\dot{x}_1$  est équivalente à l'indépendance de  $V$  par rapport à la coordonnée cartésienne  $x_1$ , c'est-à-dire au caractère cyclique de  $x_1$  pour le Lagrangien  $L = T - V$ . Cela correspond clairement à l'invariance de  $L$  par translation dans la direction  $x_1 : x_1 \rightarrow x_1 + a$ .

Cette relation très importante entre lois de conservation et invariance sous transformations de coordonnées est clairement illustrée par la formulation lagrangienne, en termes de propriétés d'invariance de  $L$ .

**Exemple 4.8.** Comme autre exemple de la relation entre les propriétés de symétrie et l'indépendance temporelle des moments conjugués, considérons une particule contrainte de se déplacer sur un cône vertical d'angle d'ouverture  $2\alpha$  soumis à la gravité.

La symétrie cylindrique suggère d'utiliser la distance  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  à l'axe du cône, pris comme l'axe  $z$ , et l'angle  $\varphi$  dans le plan  $x - y$  comme coordonnées lagrangiennes. La symétrie cylindrique implique que le Lagrangien  $L$  est indépendant de  $\varphi$  et que la composante  $z$ ,  $L_z$ , du moment cinétique est une constante du mouvement. En fait, on a :

$$L = \frac{1}{2}m \left( \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{\sin^2 \alpha} \right) - \frac{mg\rho}{\tan \alpha}, \quad (4.111)$$

et  $\partial L / \partial \varphi = 0$  donne  $p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} = L_z = \text{constante}$ .

L'autre équation de Lagrange donne :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\ddot{\rho} / \sin^2 \alpha = \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho \dot{\varphi}^2 - \frac{mg}{\tan \alpha}. \quad (4.112)$$

L'équation ci-dessus peut aussi s'écrire :

$$\ddot{\rho} = \frac{L_z}{m^2 \rho^3} \sin^2 \alpha - g \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.113)$$

Il est important de noter que  $\dot{\varphi} = L_z / (m\rho^2)$  n'est pas constant dans le temps, sauf dans le cas particulier des orbites circulaires correspondant à  $\rho = C_1$ ,  $\dot{\varphi} = C_2$ , qui sont des solutions si les conditions initiales satisfont  $L_z(0)^2 / (m^2 \rho(0)^2) = g \cot \alpha$ .

#### 4.9.6 Systèmes isolés

Un système est dit isolé si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Autrement dit,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (4.114)$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{constante.}$$

La fonction  $h(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  s'appelle la *fonction hamiltonienne*. Sa valeur correspond à l'énergie.

**Exemple 4.9.** Supposons que le potentiel  $V$  ne dépende pas des vitesses, et que l'énergie cinétique dépende du carré des vitesses :

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \\ \Rightarrow h &= 2T - L = 2T - T + V = T + V. \end{aligned}$$

On retrouve la conservation de l'énergie mécanique.

**Application : Pendule sphérique.**

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \theta \quad (4.115)$$

- $L$  ne dépend pas explicitement du temps

$$\Rightarrow E = T + V \text{ est conservé.}$$

- $L$  ne dépend pas explicitement de  $\varphi$

$$\Rightarrow L_z \text{ est conservé.}$$

#### 4.9.7 Non-unicité du Lagrangien

La prescription implicite adoptée jusqu'ici était que le Lagrangien soit défini comme  $L = T - V$ , éventuellement avec  $V$  remplacé par le potentiel généralisé. Cependant, la question se pose de savoir à quel point une telle prescription est unique pour des équations du mouvement données.

Clairement, une mise à l'échelle  $L' = \lambda L$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , conduit aux mêmes équations du mouvement. Plus généralement, en dehors d'un facteur d'échelle, l'arbitraire se réduit à l'addition d'une dérivée totale,  $L' - L = dF(q)/dt$ . La fonction  $F$  ne peut pas dépendre de  $\dot{q}$  car autrement  $L'$  impliquerait  $\ddot{q}$ . (Dans l'intégrale d'action  $A = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ ,  $dF/dt$  correspond à un *terme de bord*.)

En fait, la dérivée totale satisfait l'équation d'Euler comme une identité, *indépendamment du Lagrangien*  $L$  :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_j}, \quad (4.116)$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt}. \quad (4.117)$$

Ainsi, les termes contenant  $F$  disparaissent des équations d'Euler dérivées de  $L'$ , et on obtient les mêmes équations d'Euler dérivées de  $L$ , c'est-à-dire la même loi dynamique.

De manière évidente, l'addition d'une dérivée totale modifie la définition des moments conjugués :

$$p'_i \equiv \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = p_i + \frac{\partial F(q)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.118)$$

## Chapter 5

# La formulation variationnelle de la mécanique analytique

### 5.1 Le principe de moindre action en physique

En mécanique analytique, les équations d'Euler-Lagrange sont généralement dérivées à partir du principe de d'Alembert, qui exprime l'équilibre des forces et des inerties en termes de déplacements virtuels. Mais il existe une autre approche, plus générale et plus élégante : le **principe de moindre action**. Ce principe affirme que la trajectoire effectivement suivie par un système physique est celle qui rend **extrémale** (en général minimale) une certaine quantité appelée *action*, définie par

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (5.1)$$

où  $L(q, \dot{q}, t)$  est le *lagrangien* du système.

De manière analogue, lorsqu'on décrit non plus une particule mais un *champ* (comme par exemple le champ électromagnétique), on écrit

$$S[\Phi] = \int \mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi, x) d^4x, \quad (5.2)$$

où  $\mathcal{L}$  est la *densité lagrangienne* du champ.

L'idée fondamentale est la suivante : on regroupe toute la dynamique dans les propriétés d'une seule fonction scalaire dite l'*action*. Cette fonction est plus correctement une fonctionnelle car elle dépend de la trajectoire entière  $q(t)$  ou du champ entier  $\Phi(x)$ , et pas seulement de la position ou de l'état à un instant donné. L'action est exprimée en termes du lagrangien  $L$  (ou  $\mathcal{L}$ ). Ensuite, **on fait varier l'action**, c'est-à-dire qu'on cherche la forme de  $q(t)$  ou de  $\Phi(x)$  qui rend  $S$  stationnaire. Cette variation conduit aux **équations d'Euler-Lagrange**, qui sont équivalentes aux équations du mouvement comme nous l'avons vu.

Ainsi, un même schéma se répète dans toute la physique :

1. On écrit le lagrangien qui décrit le système ;
2. On calcule l'action ;
3. On varie, on intègre par parties, on fixe les bords ;
4. On obtient les équations du mouvement.

Pourquoi cette approche est-elle si puissante ? On identifie plusieurs raisons :

- **Elle est générale** : le même principe s'applique à une particule, à un système de plusieurs corps, à un champ électromagnétique ou gravitationnel.
- **Elle respecte les symétries** : un changement de coordonnées ou de référentiel ne modifie pas la forme de l'action, seulement sa manière d'être exprimée.
- **Elle révèle les lois de conservation** : grâce au *théorème de Noether*, toute symétrie continue de l'action (comme l'invariance par translation dans le temps ou dans l'espace) conduit à une grandeur conservée (énergie, quantité de mouvement, moment angulaire, charge électrique, etc.).
- **Elle s'étend naturellement à la physique moderne** : mécanique quantique (formulation de Feynman), relativité générale, physique des champs et théories de jauge reposent toutes sur ce même principe.

On peut mentionner ici quelques exemple important où le principe de moindre action mène aux équations fondamentales de la physique :

**Électromagnétisme.** À partir de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_{\mu}A^{\mu}, \quad (5.3)$$

la variation par rapport au potentiel  $A_{\mu}$  donne les équations de Maxwell, tandis que l'invariance de jauge garantit la conservation de la charge électrique.

**Relativité générale.** La variation de l'action d'Einstein–Hilbert,

$$S_{\text{EH}} = \frac{c^3}{16\pi G} \int R\sqrt{-g} d^4x + S_{\text{matière}}, \quad (5.4)$$

conduit aux équations d'Einstein, qui relie la géométrie de l'espace-temps au contenu en énergie et matière.

**Physique quantique.** Dans la formulation de Feynman, chaque chemin classique possible contribue avec un facteur  $e^{iS/\hbar}$  à l'état quantique du système. Donc la solution des "équations du mouvement" n'est pas celle qui rend l'action stationnaire, mais une somme sur toutes les trajectoires possibles pondérées par cette phase. La beauté de la formulation de Feynman de la physique quantique est qu'elle fait ressortir très naturellement la limite classique : lorsque  $\hbar \rightarrow 0$  les contributions des trajectoires voisines s'annulent par interférence destructrice, et la trajectoire classique apparaît comme celle pour laquelle la phase est stationnaire. La formulation de Schrödinger et Heisenberg de la physique quantique est équivalente à celle de Feynman, mais elle rend beaucoup plus difficile l'établissement d'un lien entre la physique quantique et sa limite classique.

Dans ce chapitre, nous allons :

- établir les équations d'Euler–Lagrange à partir du calcul des variations ;
- montrer leur équivalence avec la formulation de Lagrange en mécanique classique ;
- introduire le traitement des contraintes par multiplicateurs de Lagrange ;

- et enfin esquisser comment le même formalisme s'étend aux champs continus.

L'objectif est de comprendre comment un **principe unique**, celui de la moindre action, permet d'unifier et d'éclairer une grande partie de la physique, des systèmes mécaniques les plus simples jusqu'aux théories de champs les plus élaborées.

## 5.2 Introduction au calcul des variations

Les équations de Lagrange ont la même forme que les équations d'Euler établies par Euler dans le cadre plus général du calcul des variations. Cette remarque est à l'origine d'une nouvelle formulation de la mécanique. Commençons donc par établir cette propriété.

Considérons le problème suivant : soit une fonctionnelle  $I[y]$ , c'est-à-dire une fonction de l'espace des fonctions dérivables dans  $\mathbb{R}$ , qui à une fonction  $y(x)$  associe le nombre réel

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \quad (5.5)$$

où  $x_1, x_2$  sont des bornes d'intégration fixées une fois pour toutes, et  $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ . On cherche la fonction  $y(x)$  qui rend  $I[y]$  extrémal avec les contraintes

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \quad y_1, y_2 \text{ donnés.} \quad (5.6)$$

On définit par ailleurs  $\partial_1 F =$  dérivée par rapport à la première variable et  $\partial_2 F =$  dérivée par rapport à la seconde. Supposons que  $y(x)$  soit la solution du problème, et considérons la famille de fonctions  $z(x, \alpha) = y(x) + \alpha \eta(x)$ , où  $\eta(x)$  est une fonction dérivable quelconque de  $x$  qui satisfait  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Définissons par ailleurs

$$\tilde{I}(\alpha) \equiv I[z(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} dx F\left(z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x\right). \quad (5.7)$$

Si  $I$  est extrémal pour  $y(x)$  alors

$$\left. \frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (5.8)$$

Or,

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \partial_1 F\left(z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x\right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \partial_2 F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, x\right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} \right]. \quad (5.9)$$

Pris en  $\alpha = 0$ , on obtient donc :

$$\left. \frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx [\partial_1 F(y, y', x) \eta(x) + \partial_2 F(y, y', x) \eta'(x)]. \quad (5.10)$$

On intègre le deuxième terme par partie :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx [\partial_2 F(y, y', x) \eta'(x)] = [\partial_2 F(y, y', x) \eta(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{d}{dx} \partial_2 F(y, y', x) \right] \eta(x). \quad (5.11)$$

Le terme tout intégré est nul puisque  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  et la condition  $\left. \frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$  s'écrit donc :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \partial_1 F(y, y', x) - \frac{d}{dx} \partial_2 F(y, y', x) \right] \eta(x) = 0 \quad \forall \eta(x) \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \partial_1 F(y, y', x) - \frac{d}{dx} [\partial_2 F(y, y', x)] = 0.$$

Ou, avec les notations qui font apparaître les variables pour les dérivées partielles, et en changeant le signe :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (\text{Équation d'Euler}). \quad (5.13)$$

S'il y a plusieurs variables  $y_1, \dots, y_n$ , il suffit de considérer successivement les fonctions d'essai :

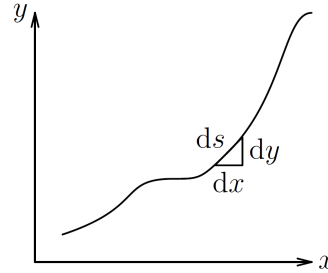
$$\begin{cases} z_i(x) = y_i(x) + \alpha \eta(x) \\ z_j(x) = y_j(x) \quad \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (5.14)$$

pour arriver aux équations d'Euler :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right] - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.15)$$

**Exemple :** Essayons de déterminer le chemin le plus court pour aller d'un point  $A(x_1, y_1)$  à un point  $B(x_2, y_2)$  dans le plan. La distance le long d'une courbe  $C$  définie par  $y(x)$  avec  $y(x_1) = y_1$  et  $y(x_2) = y_2$  est donnée par

$$\int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (5.16)$$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (\text{Pythagore})$$

La longueur du chemin le long de la courbe  $y(x)$  peut donc se mettre sous la forme

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \quad \text{avec} \quad F(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (5.17)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

L'équation d'Euler conduit à la condition

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c = \text{constante}. \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\pm c}{\sqrt{1 - c^2}} = a = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad y = ax + b.$$

C'est une droite !

### 5.3 Le principe de moindre action

Les équations de Newton ou de Lagrange permettent de déterminer l'évolution d'un système si l'on connaît à l'instant initial les positions et les vitesses des particules. Dans l'espace à  $3N$  dimensions des positions des particules, l'évolution définit donc des trajectoires.

On peut dès lors se poser la question suivante : considérons deux points sur une trajectoire donnée entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , caractérisés par la donnée de  $\{q_i^1\}$  et  $\{q_i^2\}$ . Peut-on caractériser les trajectoires physiques par un principe global qui consiste à les comparer aux autres trajectoires "possibles" (ou virtuelles) du système ? Autrement dit, si l'on considère l'ensemble des fonctions  $\{q_i(t)\}$  telles que  $q_i(t_1) = q_i^1$  et  $q_i(t_2) = q_i^2$ , est-ce qu'on peut déterminer directement lesquelles correspondent aux trajectoires physiques sans calculer l'évolution du système ? La réponse à cette question très simple est à l'origine de la formulation la plus générale et la plus compacte des lois de la mécanique classique.

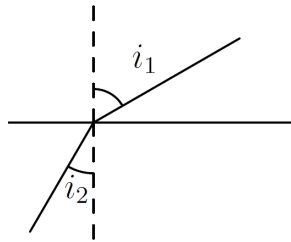
Une telle façon de formuler les lois de la physique est très générale. Elle a pour la première fois été utilisée dans le cadre de l'optique géométrique où elle est connue sous le nom de *principe de Fermat*, qui stipule que le chemin optique

$$\int_1^2 n(\vec{r}) ds \quad (5.19)$$

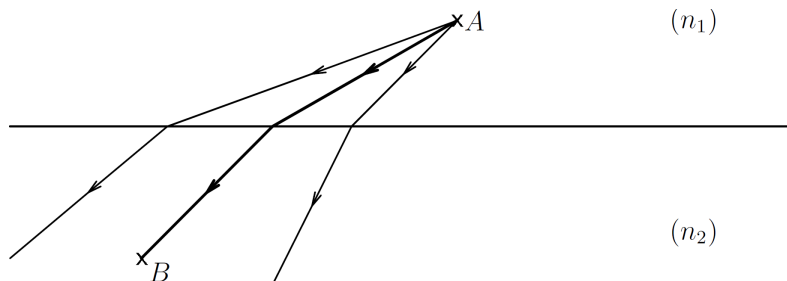
le long d'une trajectoire est minimum. Dans ce cadre, la différence entre les deux points de vue (local ou global) est facile à illustrer. Considérons un dioptre plan séparant deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ . Comment trouver la trajectoire de la lumière pour aller d'un point  $A$  dans (1) à un point  $B$  dans (2) ?

**Formulation locale :** la lumière se propage de façon rectiligne dans un milieu d'indice homogène. À la séparation entre deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , les angles d'incidence satisfont la loi de Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (5.20)$$

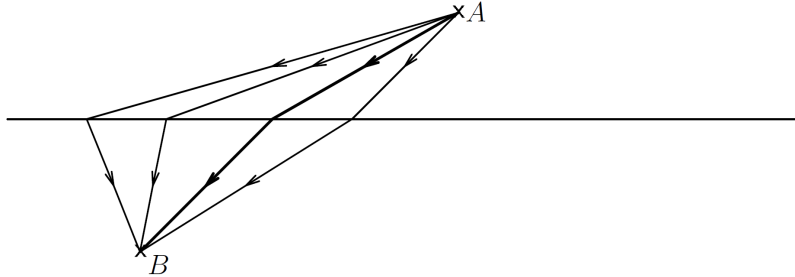


Dans la formulation locale, on compare toutes les trajectoires issues de  $A$ , et on cherche celle qui passe par  $B$ .



**Formulation globale :** On calcule le chemin optique le long de toutes les trajectoires passant par  $A$  et  $B$ . La trajectoire physique est celle qui minimise le chemin optique :

$$\int_A^B n(\vec{r}) ds. \quad (5.21)$$



On démontre aisément que celle qui minimise le chemin optique satisfait la loi de Descartes.

L'équivalent du chemin optique en mécanique s'appelle *l'action*. Elle est définie de la façon suivante.

**Définition :** l'action est une *fonctionnelle* des trajectoires définie par

$$S[\{q_i(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) dt. \quad (5.22)$$

Cette fonctionnelle permet de formuler les lois de la mécanique à l'aide d'un principe du même type que le principe de Fermat en optique.

**Principe de moindre action :** dans l'ensemble des trajectoires possibles allant d'une configuration donnée  $\{q_1^1, \dots, q_N^1\}$  à l'instant  $t_1$  à une configuration donnée  $\{q_1^2, \dots, q_N^2\}$  à l'instant  $t_2$ , l'action est extrémale pour la trajectoire physique.

**Remarque :** il peut en principe y avoir plusieurs trajectoires qui rendent l'action extrémale, mais en pratique il n'y en a en général qu'une. Par ailleurs, l'extrémum est en général un minimum, d'où le nom de *principe de moindre action*.

**Équivalence avec les autres formulations :** d'après les résultats de la section précédente relatifs au calcul des variations, la fonctionnelle  $S[\{q_i(t)\}]$  sera extrémale si les trajectoires  $q_i(t)$  satisfont les équations d'Euler correspondantes. Or, le lagrangien  $L$  joue le rôle de la fonction  $F$ , le temps  $t$  celui de la variable  $x$ , et les trajectoires  $q_i(t)$  celui des fonctions  $y_i(x)$ . Les équations d'Euler s'écrivent donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.23)$$

On reconnaît bien sûr les équations de Lagrange. Le principe de moindre action est donc bien équivalent aux équations de Lagrange, donc à la formulation newtonienne de la mécanique.

### 5.3.1 Théorème des extremums liés

Considérons une fonction à deux variables  $F(x, y)$  dont on cherche le minimum sous la contrainte  $f(x, y) = 0$ . Quelles sont les équations qui conduisent au minimum ?

*Réponse :* Il suffit de minimiser la fonction de trois variables

$$H(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda f(x, y). \quad (5.24)$$

Les valeurs  $x_{\min}, y_{\min}$  sont la solution du problème,  $\lambda$  s'appelle un *multiplicateur de Lagrange*.

*Démonstration :*

Minimiser  $H$  veut dire qu'il faut satisfaire les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 & \Leftrightarrow & f(x, y) = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

La troisième équation n'est rien d'autre que la contrainte. Il faut donc démontrer qu'il existe  $\lambda$  tel que les deux premières conditions soient vérifiées. Si  $F$  est minimum, alors

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y = 0, \quad (5.26)$$

où le déplacement  $(\delta x, \delta y)$  doit être en accord avec la contrainte. Or, d'après la contrainte  $f(x, y) = 0$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0. \quad (5.27)$$

On rappelle que cette équation établit que les déplacements virtuels sont parallèles aux surfaces  $f = \text{cte}$ , car orthogonaux au gradient de ces surfaces. On peut multiplier par une constante arbitraire :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0 \quad (\forall \lambda). \quad (5.28)$$

En prénant la somme avec l'équation  $\delta F = 0$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left( \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y = 0. \quad (5.29)$$

On peut maintenant appliquer un raisonnement similaire à celui qui a conduit à l'Eq. (4.103) dans le chapitre précédent. On en déduit que les deux termes doivent s'annuler indépendamment et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (5.31)$$

C.Q.F.D.

## 5.4 Principe de moindre action et contraintes holonomes

Supposons qu'un système soit décrit par  $k$  contraintes holonomes :

$$f_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.32)$$

ou, en termes de  $3N$  coordonnées  $x_i, i = 1, \dots, 3N$  :

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.33)$$

Les équations de Lagrange nous permettent d'écrire directement les équations du mouvement en termes des coordonnées généralisées. Mais comment s'y prendre si on ne peut pas inverser explicitement les contraintes ? L'approche variationnelle permet de traiter ce problème.

On rappelle encore une fois que les déplacements virtuels définissent des vecteurs orthogonaux aux gradients des fonctions de contrainte :  $\delta \mathbf{x} \cdot \nabla f_j = 0$ , ce qui se traduit explicitement en

$$\delta f_j = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (5.34)$$

On multiplie par des constantes arbitraires  $\lambda_j$ , tout en remarquant que cette procédure se fait à chaque instant du temps fixé, et que donc on peut voir les  $\lambda_j(t)$  comme des fonctions du temps

$$\Rightarrow \lambda_j \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\forall \lambda_j)$$

on prend la somme sur  $j$

$$\Rightarrow \sum_j \lambda_j \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (\forall \lambda_j)$$

et on intègre ce résultat dans le temps entre les instants  $t_1$  et  $t_2$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left( \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0 \quad (\forall \lambda_j(t)). \quad (5.35)$$

Nous allons utiliser cette relation par la suite.

Par ailleurs, d'après le calcul des variations, si l'on ajoute un petit déplacement  $\delta x_i(t)$  tel que  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$  à une trajectoire  $\{x_i(t)\}$  donnée, la variation de l'action au premier ordre en  $\delta x_i$  est donnée par

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right). \quad (5.36)$$

*Démonstration* : considérons des déplacements de la forme  $\delta x_i(t) = \alpha_i \eta_i(t)$ , avec  $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$ , et définissons la fonction

$$\tilde{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}) \equiv S[\{x_i(t) + \alpha_i \eta_i(t)\}]. \quad (5.37)$$

Pour  $\alpha_i$  petit, le développement de Taylor au premier ordre s'écrit

$$\tilde{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}) = \tilde{S}(0, \dots, 0) + \sum_i \alpha_i \left. \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0}. \quad (5.38)$$

Mais, d'après le calcul des variations,

$$\left. \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) \eta_i(t) dt. \quad (5.39)$$

On en déduit que  $\delta S \equiv \tilde{S}(\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}) - \tilde{S}(0, \dots, 0)$  est donné par

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \alpha_i \eta_i(t) \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) dt. \quad (5.40)$$

C.Q.F.D.

Le principe de moindre action stipule que, pour un déplacement possible du système,  $\delta S = 0$ . Autrement dit, si  $\delta x_i(t)$  est un déplacement virtuel satisfaisant  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$ , on doit avoir

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) dt = 0. \quad (5.41)$$

Si on rajoute cette équation à l'équation (5.35), valable pour tout déplacement virtuel, donc en particulier pour tout déplacement virtuel satisfaisant  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$ , il vient

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dt = 0. \quad (5.42)$$

En utilisant encore une fois la même procédure qui nous a mené aux équations de Lagrange (4.106), on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (5.43)$$

qui n'est valable qu'à condition de satisfaire les toutes les contraintes. On remarque que, comme pour la démarche suivie pour obtenir (4.106), les constantes  $\lambda_j$  dans la dernière équation ont été re-définies, ce qui ne change pas la validité de l'approche car il s'agit de quantités arbitraires qui sont déterminées par la solution des équations de Lagrange. Finalement, nous avons  $3N + k$  inconnues  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, 3N$  et  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , et  $3N + k$  équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & i = 1, \dots, 3N, \\ f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, & j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (5.44)$$

La solution combinée de ce système d'équations donne les équations du mouvement tout en satisfaisant les contraintes. On reconnaît ici les mêmes équations que nous avons obtenu dans le théorème des extremums liés. Les  $\lambda_j$  sont donc les *multiplicateurs de Lagrange* et servent à tenir compte automatiquement des contraintes holonomes.

Ce résultat peut être reformulé de la façon suivante : un problème de mécanique à  $3N$  degrés de liberté  $x_1, \dots, x_{3N}$  décrit par un lagrangien  $L$  et  $k$  contraintes  $f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , est équivalent à un problème sans contrainte à  $3N + k$  degrés de liberté  $x_1, \dots, x_{3N}, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  décrit par le lagrangien

$$\tilde{L} = L + \sum_j \lambda_j f_j. \quad (5.45)$$

En effet, comme  $\tilde{L}$  ne dépend pas explicitement de  $\dot{\lambda}_j$ , les équations pour  $x_i$  redonnent les  $3N$  premières équations, et les équations pour  $\lambda_j$  redonnent les  $k$  dernières.

*Remarques :*

- Les  $\lambda_j$  sont des fonctions de  $t$ , et non des constantes comme dans le problème des extrémums liés.
- Ces équations sont valables dans tout système de coordonnées, et non pas simplement en coordonnées cartésiennes.

## 5.5 Équations de Lagrange et forces de contrainte

Au début de ce chapitre, nous avons établi les équations de Lagrange avec l'objectif de se débarrasser des forces de contraintes. Il peut néanmoins être nécessaire de déterminer ces forces de contraintes, par exemple pour évaluer la résistance d'un dispositif lors du mouvement d'un système contraint.

Mais si l'on décrit les contraintes par un champ de force  $\vec{R}_i$ , on peut reproduire le raisonnement qui conduit aux équations de Lagrange à condition de garder  $3N$  coordonnées. Si les forces autres que les forces de contrainte dérivent d'un potentiel  $V$ , on en déduit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = R_{ix}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = R_{iy}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_i} = R_{iz}. \end{cases} \quad (5.46)$$

On peut également faire un changement de variables conduisant à  $s$  nouvelles variables  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ , où  $3N \geq s \geq 3N - k$ , et  $k$  est le nombre de contraintes. Les forces de contrainte généralisées sont définies par

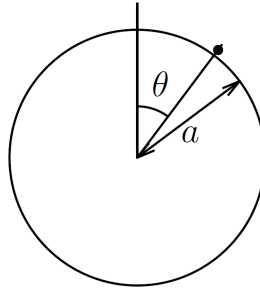
$$R_j \equiv \sum_i \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = R_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad (5.47)$$

ce qui permet de calculer les forces de contrainte généralisées à partir des solutions de l'équation du mouvement.

*Exemple :* considérons un point matériel qui glisse à la surface d'un cylindre. Si le mouvement a lieu dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  du cylindre, les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  sont bien adaptées : la contrainte s'écrit  $r = a$ , et la seule coordonnée généralisée est  $\theta$ .



1.

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga \cos \theta$$

est indépendant du temps  $\Rightarrow T + V = \text{constante}$ .

2.

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr \cos \theta.$$

3.

$$R_r = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = -ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad \text{car } \ddot{r} = 0. \quad (5.48)$$

Si à  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ , on a

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \cos \theta = mga, \quad (5.49)$$

d'où

$$R_r = -ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (5.50)$$

$$= 2mg(\cos \theta - 1) + mg \cos \theta \quad (5.51)$$

$$= mg(3 \cos \theta - 2). \quad (5.52)$$

Ainsi,  $R_r > 0$  tant que  $\cos \theta > \frac{2}{3}$ . Au-delà de  $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$ , la bille n'est plus en contact avec la sphère.

## 5.6 Principe de moindre action et contraintes plus générales

Une contrainte holonôme

$$f_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad (5.53)$$

conduit, en dérivant par rapport au temps, à une contrainte du type

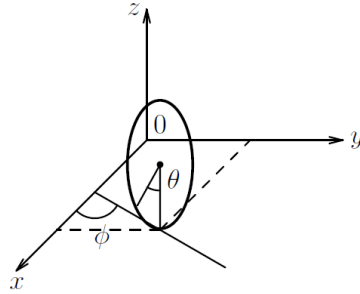
$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0. \quad (5.54)$$

Dans certains cas, les contraintes s'écrivent directement comme des relations entre les vitesses, mais sans que les coefficients soient reliés entre eux par le fait d'être des dérivées partielles.

*Exemple :* Une roue de rayon  $R$ , dont le plan est orienté dans la direction verticale  $z$ , roule sans glisser dans le plan horizontal.

La vitesse du point de contact doit être nulle :

$$\begin{cases} \dot{x} - R \cos \phi \dot{\theta} = 0, \\ \dot{y} - R \sin \phi \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$



Un tel problème ne peut se décrire à l'aide de fonctions  $f_j$ . En effet, comme il n'y a pas de terme en  $\dot{\phi}$ , les  $f_j$  devraient être indépendantes de  $\phi$ . Mais le coefficient de  $\dot{\theta}$  dépend de  $\phi$ .

De telles contraintes sont non holonomes. Elles s'écrivent de façon générale :

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j = 0, \quad (5.55)$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \frac{dx_i}{dt} + a_0^j = 0,$$

soit

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j dx_i + a_0^j dt = 0. \quad (5.56)$$

Pour résoudre ce problème, il est traditionnel d'introduire des déplacements virtuels satisfaisant

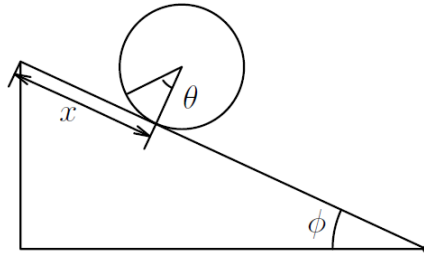
$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \delta x_i = 0, \quad (5.57)$$

l'idée étant que ces déplacements virtuels se font à temps constant ( $dt = 0$ ), et de faire l'hypothèse que l'action est extrémale vis-à-vis de ces déplacements virtuels. Le calcul fait pour les contraintes holonomes se transpose sans aucune modification, et on obtient les équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_j \lambda_j a_i^j, & i = 1, \dots, 3N, \\ \sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j = 0, & j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (5.58)$$

Ces équations sont parfois appelées *équations de Lagrange de première espèce*.

*Exemple* : Un cylindre roule sans glisser sur un plan incliné.



**Contrainte** :  $r\dot{\theta} = \dot{x}$

**Remarque** : cette contrainte est intégrable et on pourrait aisément se débarrasser d'une variable.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2,$$

$$V = Mg(l - x) \sin \phi, \quad l = \text{longueur du plan incliné.}$$

La contrainte se réécrit :

$$r\dot{\theta} - \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_\theta = r, \quad a_x = -1.$$

$$L = T - V$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Mr^2 \dot{\theta} & \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = Mr^2 \ddot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, & & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} & \Rightarrow & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = M\ddot{x}, \\ \frac{\partial L}{\partial x} = +Mg \sin \phi, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x} - Mg \sin \phi = -\lambda, \\ Mr^2\ddot{\theta} = \lambda r. \end{cases} \quad (5.59)$$

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad r\ddot{\theta} = \ddot{x} \quad (5.60)$$

$$(5.59) \Rightarrow M\ddot{x} = \lambda$$

$$(5.60) \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}, \\ \lambda = \frac{Mg \sin \phi}{2}, \\ \ddot{\theta} = \frac{g \sin \phi}{2r}. \end{cases} \quad (5.61)$$

Calcul direct :

$$r\theta + C = x \quad \Rightarrow \quad \text{on élimine } \theta.$$

$$\begin{cases} T = M\dot{x}^2, \\ V = Mg(l - x) \sin \phi, \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2M\ddot{x} = Mg \sin \phi \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g \sin \phi}{2}.$$

Remarque : Les déplacements virtuels pour une contrainte du type

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \dot{x}_i + a_0^j$$

sont définis par

$$\sum_{i=1}^{3N} a_i^j \delta x_i = 0.$$

La minimisation de l'action pour ces déplacements virtuels conduit aux équations de Lagrange de première espèce.

On peut aussi aborder le problème différemment et se poser la question : quelles sont les équations satisfaites par  $x_i(t)$  si l'on minimise l'action en se donnant simplement la contrainte ? Ce problème mathématique est bien posé, et la solution générale stipule que pour minimiser l'intégrale de  $F(x, y, y')$  sous la contrainte  $G(x, y, y') = 0$ , il suffit de minimiser

$$F(x, y, y') + \lambda(x)G(x, y, y')$$

(démonstration non donnée).

Pour une contrainte holonôme du type  $G(x, y) = 0$  (pas de dérivée), l'équation d'Euler-Lagrange conduit à :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda \frac{\partial G}{\partial y}. \quad (5.62)$$

On retrouve le résultat annoncé. Ce résultat se généralise immédiatement à plusieurs variables. On en déduit que pour des contraintes holonomes, le principe de moindre action reste valable.

L'action restreint aux trajectoires satisfaisant la contrainte conduit aux équations de Lagrange de première espèce. Cela n'est pas étonnant. Dans le cas de contraintes holonomes, les fonctions  $(x_1 + \delta x_1, \dots, x_N + \delta x_N)$  satisfont la contrainte dès que

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

Autrement dit, la condition que nous avons établie est une condition nécessaire.

Par contre, pour une contrainte non holonôme du type  $f(x, y)y' + g(x, y) = 0$ , l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx} [\lambda(x)f(x, y)] - \lambda \left[ \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial y} \right] = 0. \quad (5.63)$$

Dans le cas de plusieurs variables, il faut rajouter un multiplicateur de Lagrange par contrainte. En général, ces équations ne sont pas équivalentes aux équations de Lagrange de première espèce. On peut néanmoins démontrer que dans un certain nombre de cas, les solutions des équations de Lagrange de première espèce sont aussi solutions des équations (5.63). L'expérience prouve que les équations de Lagrange de première espèce conduisent à une description satisfaisante des forces de contrainte. C'est elles qui sont en général utilisées.

## 5.7 Contraintes intégrales

Les contraintes rencontrées dans le contexte des équations de Lagrange sont en général du type précédemment évoqué. Mais on rencontre souvent des contraintes plus générales dans d'autres contextes. En particulier, on doit souvent résoudre des problèmes qui consistent à extrémaliser

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx, \quad (y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2)$$

sous la contrainte

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = c.$$

*Solution* : il suffit de résoudre le problème plus général de l'extrémalisation de l'intégrale de  $G = F + \lambda f$  où  $\lambda$  est une constante, puis de choisir  $\lambda$  tel que la contrainte soit satisfaite.

*Démonstration* : considérons deux fonctions d'essai  $\eta_1(x)$  et  $\eta_2(x)$ . La condition d'extrémalité implique que la fonction

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, y' + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2') dx \quad (5.64)$$

soit extrémale, sous la contrainte

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2, y' + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2') dx = c, \quad (5.65)$$

pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

D'après le théorème des extremums liés, cela implique qu'il existe  $\lambda$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_1} \Big|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} \Big|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_2} \Big|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} \Big|_{\substack{\alpha_1=0 \\ \alpha_2=0}} = 0, \end{cases} \quad (5.66)$$

soit

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \eta_1(x) dx = 0, \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \eta_2(x) dx = 0. \end{cases} \quad (5.67)$$

La première équation fixe  $\lambda$ . Comme  $\eta_2(x)$  est indépendante de  $\eta_1(x)$ , la deuxième implique que  $G = F + \lambda f$  satisfait l'équation d'Euler. Autrement dit, il existe  $\lambda$  tel que  $\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y') dx$  soit extrémal. La valeur de  $\lambda$  doit par ailleurs être ajustée pour que la contrainte soit satisfaite.

*Exemple :* Trouver la configuration d'un fil de masse linéique  $\rho$  et de longueur  $l$  fixé entre deux points de même hauteur.



**Solution :**

Il faut minimiser l'énergie potentielle

$$I[y] = \rho \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2} \quad (5.68)$$

sous la contrainte

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} - l = 0. \quad (5.69)$$

On doit donc écrire l'équation d'Euler-Lagrange pour

$$L(y, y', x) = y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}, \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = (y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (5.71)$$

*Remarque :* Le lagrangien ne dépend pas de  $x$ . Du coup  $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L$  est une intégrale première

$$\Rightarrow (y + \lambda) \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - (y + \lambda) \frac{1 + y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{cte}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C \\ (y + \lambda)^2 &= C^2(1 + y'^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y'^2 = \frac{(y + \lambda)^2}{C^2} - 1 \\ &\Rightarrow y + \lambda = C \cosh\left(\frac{x}{C} + C_1\right) \quad \text{“chaînette”} \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} &y' = \sinh\left(\frac{x}{C} + C_1\right) \\ &\Rightarrow y'^2 = \sinh^2\left(\frac{x}{C} + C_1\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{C} + C_1\right) - 1 = \frac{(y + \lambda)^2}{C^2} - 1. \end{aligned}$$

$\lambda$ ,  $C$  et  $C_1$  sont déterminés par les équations

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2, \\ \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = l \end{cases} \Leftrightarrow y + \lambda = C \cosh\left(\frac{x}{C} + C_1\right).$$

## 5.8 Lagrangien et changements de référentiels

Comme nous sommes partis de l'équation  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  pour établir les équations de Lagrange, et que cette équation est valable dans un référentiel galiléen, la formulation lagrangienne de la mécanique est valable dans un référentiel galiléen. Mais le lagrangien dans deux référentiels galiléens en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre n'est pas le même.

*Exemple :*  $L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  dans un référentiel. Considérons un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $v_0$ . Soit  $x' = x - v_0t$  la coordonnée dans ce référentiel.

Le lagrangien  $L'$  dans ce référentiel est  $\frac{1}{2}m\dot{x}'^2$ . Par contre, le lagrangien  $L$  dans le référentiel original peut s'écrire en fonction de  $x'$  :

$$L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m(\dot{x}' + v_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (5.72)$$

Heureusement, ces deux lagrangiens conduisent aux mêmes équations. C'est un cas particulier de la remarque générale faite plus haut selon laquelle on peut ajouter une fonction du type  $\frac{dF}{dt}(q, t)$  au lagrangien sans changer les équations du mouvement.

En effet,

$$\begin{aligned} L(x', \dot{x}') - L'(x', \dot{x}') &= m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{d}{dt}\left(mv_0x' + \frac{1}{2}mv_0^2t\right). \end{aligned}$$

Si l'on préfère travailler dans un système de coordonnées qui se rapportent à un référentiel non galiléen, on peut procéder de deux façons :

1. Se placer dans ce référentiel, et inclure les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis dans le second membre des équations de Lagrange.
2. Écrire le lagrangien dans un référentiel inertiel, faire un changement de variables par rapport aux nouvelles coordonnées, et écrire les équations de Lagrange habituelles. Les forces d'inertie apparaissent automatiquement comme une conséquence du changement de variables.

## 5.9 Le Théorème de Noether (1918)

Le théorème de Noether, publié en 1918, peut être résumé en disant que *pour chaque symétrie continue du Lagrangien il y a une quantité conservée*.

Soit donné un système à  $N$  degrés de liberté, associés aux coordonnées généralisées  $q_i$ , avec  $i = 1, \dots, N$ . Le système est caractérisé par un Lagrangien  $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ . Supposons que le Lagrangien ne change pas après une transformation des coordonnées  $q_i \rightarrow q_i(s)$  qui dépendent d'un seul paramètre  $s$  :

$$L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \quad (5.73)$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds} L(\{q_i(s)\}, \{\dot{q}_i(s)\}, t) = 0. \quad (5.74)$$

On peut montrer que la quantité

$$C = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} \right) = \text{constante} \quad (5.75)$$

En effet, on prend la dérivée temporelle de l'Eq. (5.75)

$$\dot{C} = \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} \right) \right] = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(s)}{\partial s} \right] \quad (5.76)$$

En utilisant les équations de Lagrange, on peut réécrire cette dernière équation dans la forme

$$\dot{C} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(s)}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(s)}{\partial s} \right] = \frac{dL}{ds} = 0 \quad (5.77)$$

où la dernière égalité suit de la chaîne de dérivées.

**Exemple 5.1. Invariance par translations.** L'invariance par translations du Lagrangien s'écrit

$$L(\{\vec{x}_i\}, \{\dot{\vec{x}}_i\}, t) = L(\{\vec{x}_i + s\vec{u}\}, \{\dot{\vec{x}}_i\}, t)$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire qui marque la direction selon laquelle l'invariance par translation du Lagrangien est valable.

L'Eq. (5.75) nous dit que la quantité conservée est

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\vec{x}_i + s\vec{u}) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{P} \quad (5.78)$$

Autrement dit, l'invariance par translation selon  $\vec{u}$  du Lagrangien a comme conséquence la conservation de la composante selon  $\vec{u}$  de l'impulsion totale du système.



## Chapter 6

# Les équations de Hamilton

### 6.1 Conservation de l'énergie

Comme nous l'avons vu précédemment, les équations de Lagrange décrivent l'évolution temporelle des moments conjugués (par exemple, la quantité de mouvement, le moment angulaire, etc.), dont les lois de conservation sont directement liées aux symétries du Lagrangien  $L$ . Une question naturelle est de savoir s'il est possible d'obtenir une dérivation tout aussi simple de la conservation de l'énergie pour les systèmes isolés dans des référentiels inertiels.

Commençons par montrer que la fonction suivante  $H$ , des coordonnées  $q_i, \dot{q}_i$ , appelée **fonction hamiltonienne**, est une constante du mouvement si le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps (c'est-à-dire si  $\partial L/\partial t = 0$ ) :

$$H(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (6.1)$$

En effet, on a (la somme sur  $i$  est implicite)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (6.3)$$

comme conséquence des équations de Lagrange, à condition que  $\partial L/\partial t = 0$ .

L'étape suivante consiste à reconnaître que la fonction hamiltonienne correspond à l'énergie totale du système,  $H = T + V$ , si :

- i) la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées lagrangiennes ne dépend pas explicitement du temps :  $q_i = q_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  ;
- ii) le potentiel ne dépend pas des vitesses :  $\partial V/\partial \dot{q}_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

En fait, d'après l'équation (2.2), on a (la somme sur les indices répétés est implicite)

$$T = \sum_l \frac{1}{2} m \dot{x}_l^2 = \sum_l \frac{1}{2} m \frac{\partial x_l}{\partial q_j} \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_i, \quad (6.4)$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_l m \dot{x}_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}, \quad \sum_i p_i \dot{q}_i = 2T, \quad (6.5)$$

et

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - T + V = T + V. \quad (6.6)$$

**Exemple 6.1.** Considérons une masse ponctuelle soumise à une force élastique  $kx$  (oscillateur harmonique). Alors

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (6.7)$$

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = T + V, \quad (6.8)$$

c'est-à-dire que  $H$  est la fonction énergie, dont la conservation résulte du fait que  $L$  ne dépend pas explicitement du temps.

**Exemple 6.2.** Considérons une particule dans un potentiel central (voir l'Exemple 4.6). D'après (4.64) et (4.65), on obtient

$$H = m\dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 + m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 - L \quad (6.9)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} + V(r), \quad (6.10)$$

autrement dit, la fonction hamiltonienne coïncide avec l'énergie de la particule  $T + V$ .

**Exemple 6.3.** Considérons une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  se déplaçant dans un champ électromagnétique statique. Le lagrangien du système s'écrit

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) - q\phi(\mathbf{x}), \quad (6.11)$$

où  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  est le potentiel vecteur et  $\phi(\mathbf{x})$  le potentiel scalaire. Le moment canonique conjugué à la coordonnée  $\mathbf{x}$  est donné par

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad (6.12)$$

tandis que le moment *mécanique* est

$$\boldsymbol{\pi} = m\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (6.13)$$

Le hamiltonien s'obtient par la transformation de Legendre :

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L. \quad (6.14)$$

En substituant les expressions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} H &= (m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}) \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left( \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - q\phi \right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (6.15)$$

En exprimant la vitesse en fonction du moment canonique,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x})}{m},$$

on obtient finalement l'hamiltonien sous la forme

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + q\phi(\mathbf{x}). \quad (6.16)$$

Bien que le lagrangien contienne un terme dépendant de la vitesse, l'hamiltonien correspond bien à l'énergie totale du système :

$$E = T + q\phi = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\phi(\mathbf{x}). \quad (6.17)$$

Le terme  $q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}$  ne modifie pas l'énergie mécanique ; il n'affecte que la relation entre le moment canonique et le moment mécanique, garantissant que les équations de Hamilton reproduisent correctement la dynamique sous l'effet du champ magnétique.

Ainsi, dans ce cas, le *hamiltonien* représente bien l'énergie physique du système, même si le lagrangien dépend explicitement des vitesses.

**Exemple 6.4.** Un cas simple dans lequel les conditions i) et ii) ci-dessus ne sont pas satisfaites est donné par l'Exemple 3.1, repris dans l'Exemple 4.1 dans la Section 4.5. Il s'agit de décrire le mouvement d'un pendule sur un plan en rotation. Une masse ponctuelle est contrainte de se déplacer le long d'un cercle vertical de rayon  $r$  centré à l'origine et de déterminer le mouvement de la masse lorsque le cercle tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Le lagrangien dans le référentiel inertiel est donné par

$$L = \frac{1}{2}mr^2(\omega^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) - mgr \sin \theta, \quad (6.18)$$

d'où l'on déduit que le moment conjugué à  $\theta$  s'écrit  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ . Le Hamiltonien est donc donné par

$$H = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - L \quad (6.19)$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr \sin \theta - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \cos^2 \theta \quad (6.20)$$

$$= T + V - mr^2\omega^2 \cos^2 \theta, \quad (6.21)$$

où  $T$  et  $V$  sont donnés par l'équation (4.31). Comme  $L$  ne dépend pas explicitement du temps,  $H$  est une constante du mouvement, mais elle ne coïncide pas avec l'énergie de la particule  $T + V$ , qui n'est pas constante dans le temps car le système n'est pas isolé. En effet, un travail doit être fourni pour maintenir le cercle à vitesse angulaire constante  $\omega$ . Le travail effectué par les forces extérieures pendant l'intervalle de temps  $dt$  est donné par la variation de l'énergie cinétique :

$$dW = dT = -mr^2(\omega^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} + \dot{\theta}\ddot{\theta}) dt, \quad dW = -dV + dW', \quad (6.22)$$

où  $dV = mgr \cos \theta \dot{\theta} dt$  est le travail effectué par la force gravitationnelle, et  $dW'$  est le travail effectué par le moteur maintenant  $\omega$  constant. En utilisant ensuite l'équation du mouvement pour  $\theta$ , équation (3.20), on obtient

$$dW' = 2mr^2\omega^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} dt, \quad (6.23)$$

et le travail total effectué par le moteur lorsque la particule se déplace de  $\theta = -\pi/2$  à  $\theta$  est

$$W' = mr^2\omega^2 \cos^2 \theta. \quad (6.24)$$

En conclusion,  $H$  décrit l'énergie du système global (particule + moteur), qui est constante dans le temps.

La formulation lagrangienne permet une description simple dans le référentiel non inertiel  $\mathcal{R}'$ , dans lequel le cercle est au repos. Dans ce référentiel, l'énergie cinétique de la particule est donnée

par  $p_\theta^2/2mr^2$ , et l'énergie potentielle comporte à la fois la contribution  $V$  due à la force gravitationnelle et la contribution

$$V_c = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \cos^2 \theta, \quad (6.25)$$

due à la force centrifuge (potentiel centrifuge).

Ainsi, dans un tel référentiel, l'énergie totale

$$E_{\mathcal{R}'} = T_{\mathcal{R}'} + V + V_c \quad (6.26)$$

est constante dans le temps.

**Exemple 6.5.** Une différence similaire entre la fonction hamiltonienne et l'énergie de la particule se produit dans le cas d'une particule de masse  $m$  soumise à une force harmonique  $-kx$ , avec un potentiel correspondant  $V = \frac{1}{2}kr^2$ , où  $r \equiv |x|$ , et contrainte à se déplacer sur une tige horizontale qui tourne avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe (vertical)  $z$ .

On a :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2), \quad L = T - V, \quad p_r = m\dot{r}, \quad (6.27)$$

et par conséquent la fonction hamiltonienne est

$$H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + V = T + V - mr^2\omega^2. \quad (6.28)$$

Comme  $L$  ne dépend pas explicitement du temps ( $\partial L/\partial t = 0$ ),  $H$  est une constante du mouvement, tandis que l'énergie  $T + V$  ne l'est pas, car le système n'est pas isolé et que la tige effectue un travail pour maintenir une vitesse angulaire constante  $\omega$ . Comme dans l'exemple précédent, ce travail provient de la force de contrainte  $\mathbf{R}$  qui possède une composante dans la direction de la vitesse ( $\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ), et un travail est donc effectué par le moteur qui fait tourner la tige. Cela apparaît clairement dans le référentiel non inertiel où la tige est au repos, et où la force centrifuge donne lieu à un terme additionnel dans le potentiel.

## 6.2 Équations de Hamilton

Les exemples précédents montrent qu'en général, les moments conjugués  $p_i$  peuvent être plus directement liés aux grandeurs physiques pertinentes que les coordonnées  $q_i$ . En particulier, les propriétés de symétrie associées aux variables cycliques (lagrangiennes) se traduisent directement en termes de leurs moments conjugués  $p_i$ .

La description des configurations d'un système mécanique en fonction des variables  $q_i, p_i$  (appelées **variables canoniques**) est souvent plus commode que celle en fonction des variables lagrangiennes  $q_i, \dot{q}_i$ . En effet, dans les exemples discutés ci-dessus, la fonction hamiltonienne se révèle être une fonction des variables canoniques. De manière plus générale, la fonction lagrangienne  $L = T - V$  ne possède pas de correspondance directe simple avec les grandeurs canoniques.

La fonction lagrangienne  $L = T - V$  n'a donc pas toujours une signification physique directe, contrairement à la fonction hamiltonienne, qui, comme nous l'avons vu, correspond dans de nombreux cas intéressants à l'énergie,  $H = T + V$ .

On peut alors se demander s'il est possible :

- i) de réécrire les équations de Lagrange sous une forme ne faisant intervenir que les variables canoniques  $q_i$  et  $p_i$  ;

- ii) de formuler les équations du mouvement à partir de la fonction hamiltonienne (plus directement liée aux grandeurs physiques), plutôt qu'à partir de la fonction lagrangienne.

La réponse positive à ces deux questions est donnée par les **équations de Hamilton**, qui, comme nous le verrons, présentent également plusieurs avantages par rapport aux équations de Lagrange.

Pour cela, remarquons que, sous des conditions générales, les relations  $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}_i = p_i(q, \dot{q}, t)$  peuvent être inversées, c'est-à-dire que  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$ . Ainsi, de manière tout à fait générale, la fonction hamiltonienne peut être considérée comme une fonction des variables canoniques  $q$  et  $p$  :

$$H(q, p, t) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}_i(q, p, t), t). \quad (6.29)$$

Le différentiel de  $H$  peut alors s'écrire en termes des différentiels de deux ensembles de variables possibles,  $q_i, \dot{q}_i$  ou  $q_i, p_i$  :

$$dH = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (6.30)$$

$$dH = \sum_i \left( \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.31)$$

En comparant les deux expressions de  $dH$  et en utilisant  $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}_i$ , ainsi que les équations de Lagrange  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$ , on obtient :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) dp_i + \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) dq_i + \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) dt = 0. \quad (6.32)$$

Les variables  $q_i, p_i$  et  $t$ , ainsi que leurs différentielles, pouvant être considérées comme indépendantes, l'équation précédente conduit aux **équations de Hamilton** :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.33)$$

Au-delà des manipulations formelles ci-dessus, nous avons atteint les objectifs suivants :

1. Décrire la dynamique du système à l'aide d'équations qui font intervenir les variables canoniques (plus commodes).
2. Remplacer les équations de Lagrange associées aux  $n$  coordonnées lagrangiennes — équations du second ordre en temps, nécessitant donc la connaissance de  $2n$  conditions initiales indépendantes — par les équations de Hamilton pour les  $2n$  variables canoniques indépendantes, qui ont l'avantage d'être du premier ordre en temps. La relation entre  $p_i(t)$  et  $q_i(t)$  fait partie intégrante des équations de Hamilton, et non d'une relation *a priori*.
3. Obtenir une description complète de l'évolution temporelle en termes d'une seule fonction, le *Hamiltonien*, qui est (en général) relié à la fonction énergie. Au lieu de devoir spécifier toutes les forces agissant sur le système (dont certaines ne sont pas connues à l'avance) comme dans la formulation newtonienne, la formulation hamiltonienne permet d'écrire que *toute l'information sur le problème dynamique est encodée dans l'Hamiltonien*, en tant que fonction des variables canoniques.

### 6.3 Transformations de coordonnées et équations de Hamilton

Comme souligné dans le chapitre précédent, l'une des propriétés les plus importantes et les plus utiles des équations de Lagrange est leur covariance sous les changements de coordonnées (lagrangiennes), conséquence de l'équation (4.23). Il est donc naturel d'examiner les propriétés de covariance des équations de Hamilton sous les transformations des variables canoniques.

Considérons d'abord un changement de coordonnées  $q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q, t)$ . D'après l'équation (4.23), le Lagrangien se transforme de manière covariante :

$$L_Q(Q, \dot{Q}, t) = L_q(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t).$$

Par la définition des moments conjugués, on a alors (la somme sur les indices répétés est implicite) :

$$P_i \equiv \frac{\partial L_Q}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L_q(q(Q, t), \dot{q}(q(Q, \dot{Q}, t)), t)}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \quad (6.34)$$

où nous avons utilisé l'équation (4.5) :  $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_m} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_m}$ , qui reste valable pour tout changement de coordonnées. En utilisant l'équation (4.4) pour  $\dot{q}_j$ , avec  $q_i = q_i(Q, \dot{Q}, t)$ , on a :

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i = \sum_{i,j} p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = \sum_j p_j \left( \dot{q}_j - \frac{\partial q_j}{\partial t} \right). \quad (6.35)$$

Ainsi, pour l'Hamiltonien exprimé dans les nouvelles variables canoniques  $Q, P$ , on obtient :

$$H_{Q,P}(Q, P, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - L(q(Q, t), \dot{q}(Q, P, t), t). \quad (6.36)$$

En conclusion, on a :

$$H_{Q,P}(Q, P, t) = H_{q,p} - \sum_i p_i \frac{\partial q_i(Q, t)}{\partial t} \neq H_{q,p}(q(Q, t), p(Q, P, t), t). \quad (6.37)$$

Ainsi, contrairement au lagrangien, *l'Hamiltonien n'est pas un scalaire* sous un changement de coordonnées. Ce résultat reflète une propriété physique importante : en général, l'énergie d'un système mécanique dépend du choix des coordonnées. Nous allons vérifier ce fait explicitement dans quelques exemples simples ci-dessous.

**Exemple 6.6.** Considérons une particule ponctuelle soumise à un potentiel  $V$ , en une dimension.

Le lagrangien et l'hamiltonien sont :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x), \quad H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (6.38)$$

et, sous un changement de coordonnées lagrangiennes  $x \rightarrow x' = x - vt$ , correspondant à un référentiel en translation uniforme à vitesse constante  $v$ , on a :

$$L_{x'}(x', \dot{x}', t) = L_x(x(x', t), \dot{x}(x', \dot{x}', t), t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v)^2 - V(x(x', t)). \quad (6.39)$$

De plus,  $p' = m(\dot{x}' + v) = p = m\dot{x}$ . Ainsi, l'Hamiltonien dans les variables originales  $x, p$  est  $H_{x,p} = \frac{p^2}{2m} + V$ , tandis que dans le nouveau système  $(x', p')$  on a :

$$H_{x',p'}(x', p') = H_{x,p} - pv = \frac{1}{2m} p'^2 + V(x(x', t)) - p'v. \quad (6.40)$$

Cela montre que l'Hamiltonien ne se transforme pas comme un scalaire sous un tel changement de coordonnées.

**Exemple 6.7.** Considérons les propriétés de transformation de l'Hamiltonien lors d'un changement de coordonnées correspondant à un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation à vitesse angulaire constante  $\omega$  par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ .

Pour simplifier, considérons le cas d'une particule ponctuelle soumise à un potentiel  $V$ . En coordonnées cylindriques  $\rho, \varphi, z$ , avec l'axe  $z$  coïncidant avec l'axe de rotation de  $\mathcal{R}'$ , la transformation s'écrit :

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi - \omega t, \quad z' = z.$$

Le lagrangien dans les nouvelles coordonnées est :

$$L'(\rho, \varphi', z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}', \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2(\dot{\varphi}' + \omega)^2 + \dot{z}^2) - V, \quad (6.41)$$

et les moments conjugués sont :

$$p_{\rho'} = p_{\rho}, \quad p_{z'} = p_z, \quad p_{\varphi'} = m\rho^2(\dot{\varphi}' + \omega) = p_{\varphi}.$$

Ainsi,

$$H(\rho, \varphi, z, p_{\rho}, p_{\varphi}, p_z) = \frac{1}{2m} \left( p_{\rho}^2 + p_z^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\rho^2} \right) + V(\rho, \varphi, z), \quad (6.42)$$

et

$$H'(\rho, \varphi', z, p_{\rho}, p_{\varphi'}, p_z) = \frac{1}{2m} \left( p_{\rho}^2 + p_z^2 + \frac{p_{\varphi'}^2}{\rho^2} \right) + V(\rho, \varphi' + \omega t, z) - p_{\varphi}\omega \quad (6.43)$$

$$= H(\rho, \varphi' + \omega t, z, p_{\rho}, p_{\varphi}, p_z) - p_{\varphi}\omega, \quad (6.44)$$

$$p_{\varphi'} = p_{\varphi}. \quad (6.45)$$

Comme  $p_{\varphi}$  décrit la composante du moment angulaire selon l'axe  $z$ , le terme  $p_{\varphi}\omega$  peut également s'écrire sous la forme  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . L'Hamiltonien  $H$  est constant dans le temps, puisque  $L$  ne dépend pas explicitement de  $t$ , et il décrit l'énergie du système dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . En revanche,  $H'$  n'est pas constant dans le temps, puisqu'il dépend explicitement de  $t$  dans les nouvelles variables, sauf si  $V$  est indépendant de  $\varphi$ . Dans ce cas,  $p_{\varphi} = L_z$  est une constante du mouvement, et  $p_{\varphi}\omega$  l'est également.

**Exemple 6.8.** Considérons une masse ponctuelle est contrainte à se déplacer le long d'une tige de masse négligeable, qui forme un angle  $\alpha$  avec la verticale et tourne autour de celle-ci avec une vitesse angulaire  $\omega$ . De plus, la particule est soumise à une force élastique  $-\frac{1}{2}kr$ , où  $r$  est la distance à l'origine, ainsi qu'au potentiel gravitationnel.

Il est clair que le système ne possède qu'un seul degré de liberté, décrit par la coordonnée  $r$ , et l'on a :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 \sin^2 \alpha), \quad V = \frac{1}{2}kr^2 + mgr \cos \alpha, \quad (6.46)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 \sin^2 \alpha) - \frac{1}{2}kr^2 - mgr \cos \alpha. \quad (6.47)$$

L'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2}kr^2 + mgr \cos \alpha - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \sin^2 \alpha \quad (6.48)$$

$$= T + V - mr^2\omega^2 \sin^2 \alpha. \quad (6.49)$$

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, l'Hamiltonien est une constante du mouvement. Cependant, l'énergie  $E_{\mathcal{R}} = T + V$  de la particule dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  n'est pas constante dans le temps. En revanche, l'énergie  $E_{\mathcal{R}'}$  mesurée dans le référentiel en rotation  $\mathcal{R}'$ , dans lequel la tige est au repos, coïncide avec  $H$  (on remarque la présence du potentiel centrifuge) et est constante.

## 6.4 Transformations canoniques

Dans la formulation hamiltonienne, l'évolution temporelle d'un système est décrite par une trajectoire dans l'espace à  $2n$  dimensions  $\Gamma$ , appelé *espace des phases*, défini par les  $2n$  variables canoniques indépendantes. Il est donc naturel de considérer des transformations générales et inversibles des coordonnées de l'espace des phases  $\Gamma$ , à savoir :

$$q_i(t), p_i(t) \rightarrow Q_i(q, p, t), P_i(q, p, t). \quad (6.50)$$

La question essentielle qui se pose alors est de déterminer les conditions sous lesquelles, *pour tout choix de l'Hamiltonien*, les équations de Hamilton correspondantes demeurent invariantes en forme — c'est-à-dire qu'il existe une fonction hamiltonienne  $K(Q, P)$  telle que les équations de Hamilton soient valides pour les nouvelles variables  $Q, P$ . Les transformations qui satisfont cette condition sont appelées **canoniques**.

Comme le montrent les exemples précédents, les nouvelles variables  $Q_i(q, p, t)$  et  $P_i(q, p, t)$  ne peuvent pas être choisies comme des fonctions arbitraires des anciennes variables. En effet, si les nouvelles coordonnées  $Q_i$  ne dépendent pas des  $p_i$ , c.-à-d.  $Q_i = Q_i(q, t)$ , la transformation  $p_i(t) \rightarrow P_i = P_i(q, p, t)$  est alors uniquement déterminée par l'équation (6.34), c'est-à-dire que  $P_i = \sum_j p_j \partial q_j / \partial Q_i$ . C'est cette condition qui garantit que les nouvelles variables  $Q, P$  satisfont les équations de Hamilton avec un Hamiltonien  $H_{Q,P}$  obtenu à partir du lagrangien via l'équation (6.36). D'après la manière dont l'équation (6.34) a été déduite, on pourrait être amenés à penser qu'il s'agit d'une condition nécessaire pour qu'une transformation soit canonique. Cependant, ce n'est pas le cas, car cette condition a été déduite de la définition du moment conjugué  $P_i = \partial L_Q / \partial \dot{Q}_i$ , donc en supposant une forme spécifique du Lagrangien  $L_Q(Q, \dot{Q}, t)$ . Nous savons que la forme du Lagrangien n'est pas unique, car l'ajout d'une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction de  $Q(q, t)$  et  $t$  ne modifie pas les équations du mouvement. Ce changement de Lagrangien conduit en général à une forme différente pour les moments conjugués  $P_i$ , et donc à une transformation différente entre les variables canoniques. En fait, il existe des transformations canoniques plus générales qui ne satisfont pas la condition (6.34), comme nous le verrons plus loin.

Il convient de noter que, si on fait l'hypothèse additionnelle que la transformation ne dépend pas du temps, c.-à-d.

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q), \quad p_i \rightarrow P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}, \quad (6.51)$$

alors cette transformation conduit à une nouvelle fonction hamiltonienne  $H_{Q,P}$  prenant les mêmes valeurs que l'ancienne fonction hamiltonienne  $H_{q,p}$  pour les points correspondants (voir équation (6.37)). En effet, dans ce cas, on a  $\partial q_i / \partial t = 0$  dans l'équation (6.37), et donc  $H_{Q,P}(Q, P) = H_{q,p}(q(Q), p(Q, P))$ . Cette propriété de covariance est valable pour toute fonction hamiltonienne initiale  $H_{q,p}$ .

Cette remarque nous amène à considérer le cas plus général des transformations indépendantes du temps. L'étude des transformations explicitement dépendantes du temps (équation (6.50)) est plus complexe et sera abordée dans le chapitre suivant.

Pour discuter de l'invariance de forme des équations de Hamilton, il est commode de les écrire sous la forme compacte suivante :

$$\dot{X}_i = G \frac{\partial H}{\partial X_i}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.52)$$

où  $X$  désigne un vecteur colonne défini par  $X = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$ , et  $G$  est une matrice  $2n \times 2n$ , où l'élément 0 représente la matrice nulle  $n \times n$  et l'élément  $\mathbb{I}$  la matrice identité  $n \times n$ . Avec ces notations, une transformation indépendante du temps des variables canoniques  $q_i, p_i \rightarrow Q_i(q, p), P_i(q, p)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , peut s'écrire sous la forme  $X_i \rightarrow Y_i(X)$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ . Ainsi, on a :

$$\dot{Y}_i = \sum_j \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} \dot{X}_j = \sum_{j,l} \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} G_{jk} \frac{\partial H}{\partial Y_l} \frac{\partial Y_l}{\partial X_k}, \quad (6.53)$$

ou, sous forme matricielle compacte :

$$\dot{Y} = J G J^T \frac{\partial H}{\partial Y}, \quad (6.54)$$

où  $J$  est la matrice Jacobienne de la transformation ( $J_{ij} = \partial Y_i / \partial X_j$ ), et l'exposant  $T$  désigne la transposée. Ainsi :

$$(J G J^T)_{il} = \sum_{j,k} \frac{\partial Y_i}{\partial X_j} G_{jk} \frac{\partial Y_l}{\partial X_k}. \quad (6.55)$$

Il convient ici de noter une propriété importante de la matrice Jacobienne : comme la transformation est inversible, la matrice  $J$  est non singulière, c.-à-d.  $\det(J) \neq 0$ . La matrice inverse  $J^{-1}$  existe donc et ses éléments sont donnés par  $[J^{-1}]_{ij} = \partial X_i / \partial Y_j$ . Pour résumer, la forme matricielle de  $J$  et  $J^{-1}$  est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc montré que la transformation laisse les équations de Hamilton invariantes pour tout Hamiltonien  $H$ , si et seulement si :

$$\boxed{J G J^T = G} \quad (6.56)$$

Cette condition caractérise une **transformation canonique**.

Comme nous le verrons plus tard, cette condition caractérise également les transformations canoniques dépendantes du temps ; dans ce cas plus général, le nouvel Hamiltonien  $K$  diffère de l'ancien  $H$  par un terme indépendant du temps, ne dépendant que de la transformation canonique elle-même (voir les équations (6.37) et les Exemples 6.6-6.8). Il est facile de vérifier que cette condition est satisfaite pour la transformation (6.51).

**Exemple 6.9.** Il est facile de vérifier que les transformations suivantes sont canoniques :

- a)  $Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i,$
- b)  $Q_i = \lambda q_i, \quad P_i = \mu p_i, \quad \lambda \mu = 1.$

La condition  $\lambda\mu = 1$  est nécessaire et suffisante pour que la transformation soit canonique. La canonicité de la transformation (b) peut être utilisée pour transformer l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique sous la forme simple suivante :

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{p^2}{m} + k^2 q^2 \right) \longrightarrow H = \frac{1}{2} \omega (P^2 + Q^2), \quad \omega \equiv \frac{k}{m}, \quad (6.57)$$

en choisissant  $\lambda = \sqrt{m\omega}$  et  $\mu = \lambda^{-1}$ .

**Exemple 6.10.** Vérifier que la transformation

$$Q_i = \alpha q_i + \beta p_i, \quad P_i = \gamma q_i + \delta p_i, \quad (6.58)$$

est canonique si et seulement si  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .

**Exemple 6.11.** Nous allons ici déduire la condition la plus générale sous laquelle une transformation indépendante du temps de la forme

$$q \rightarrow Q(q), \quad p \rightarrow P(q, p)$$

satisfait la condition de canonicité (6.56). On verra que la condition  $P_i = \sum_j p_j \partial q_j / \partial Q_i$  n'est pas la condition la plus générale, comme nous l'avons remarqué avant. On peut démontrer que une condition nécessaire et suffisante pour que la transformation soit canonique est que  $P(q, p)$  est de la forme

$$P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i}, \quad (6.59)$$

où  $\Phi(q)$  est une fonction scalaire (appelée *générateur* de la transformation). Pour le démontrer, on demande que la condition matricielle de canonicité  $JGJ^T = G$  soit satisfaite.

$$JGJ^T = G.$$

On remarque d'abord que, dans le cas où  $Q$  ne dépend pas de  $p$ , on a simplement  $\partial Q / \partial p = 0$  et :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

En substituant cette forme dans la condition de canonicité, on obtient

$$JGJ^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & 0 \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^T & \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \\ 0 & \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.60)$$

L'égalité (6.60) conduit à deux conditions indépendantes :

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)^T = \mathbb{I}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} \left( \frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \text{ est symétrique.}$$

De la première relation, on déduit

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^{-1} \right]^T,$$

et donc  $\partial P/\partial p$  ne dépend pas de  $p$  (puisque  $\partial Q/\partial q$  dépend uniquement de  $q$ ). Le fait que  $Q_i(q)$  ne dépende pas de  $p$  implique aussi que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{-1} = \frac{\partial q}{\partial Q}.$$

On peut alors intégrer cette expression par rapport à  $p$ , ce qui donne :

$$P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \Phi_i(q), \quad (6.61)$$

où  $\Phi_i(q)$  est une fonction de  $q$  seule. La deuxième condition impose que la matrice  $\partial\Phi_i/\partial Q_j$  soit symétrique, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial Q_j} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial Q_i} = 0. \quad (6.62)$$

D'après le lemme de Poincaré, cela implique que  $\Phi_i$  dérive d'un potentiel scalaire : il existe une fonction  $\Phi(q)$  telle que  $\Phi_i = \partial\Phi/\partial Q_i$  (ou, de manière équivalente,  $\Phi_i = \partial\Phi/\partial q_i$ ). En substituant cela dans (6.61), on obtient bien l'expression (6.59).

**Commentaire.** La transformation ainsi définie peut donc s'écrire sous la forme :

$$Q_i = Q_i(q), \quad P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial\Phi(q)}{\partial q_i},$$

et satisfait la condition de canonicité (6.56). La fonction  $\Phi(q)$  agit comme un *générateur* de la transformation canonique. On verra plus loin dans le détail le formalisme des fonctions génératrices des transformations canoniques.

**Exemple 6.12.** Pour faire le lien entre la condition nécessaire (6.61) et la transformation (6.34) obtenue à partir du lagrangien, considérons l'effet sur l'Hamiltonien de l'ajout d'une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction  $\Phi(q)$  au lagrangien. L'ajout au lagrangien d'une dérivée totale par rapport au temps :

$$L \rightarrow L + \frac{d\Phi(q)}{dt} \equiv L', \quad (6.63)$$

modifie la définition des moments conjugués, mais conduit à des équations de Hamilton équivalentes — autrement dit, la même dynamique est décrite en termes de variables canoniques différentes. En effet, à partir de  $L'$ , on obtient :

$$p'_j \equiv \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} = p_j + \frac{\partial\Phi(q)}{\partial q_j}, \quad \left. \frac{\partial p_k}{\partial p'_j} \right|_q = \delta_{kj}, \quad (6.64)$$

où la notation  $|_q$  indique que  $q$  doit être maintenu fixe lors de la dérivation partielle par rapport aux autres variables. De plus, les fonctions  $q_i(t)$  et  $\dot{q}_i(t)$  ne changent pas. Alors (somme sur les indices répétés implicite) :

$$\begin{aligned} H'(q, p') &= p'_j \dot{q}_j - L' = \left( p_j + \frac{\partial\Phi}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j - L - \frac{\partial\Phi}{\partial q_j} \dot{q}_j = H(q, p) \\ &= H\left( q, p' - \frac{\partial\Phi(q)}{\partial q} \right). \end{aligned} \quad (6.65)$$

**Remarque 6.1.** La transformation :

$$Q_i(t) = q_i(t), \quad \dot{Q}_i(t) = \dot{q}_i(t), \quad P_i(t) = p_i(t) + \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i}, \quad (6.66)$$

est un cas particulier des transformations discutées dans l'Exemple 6.11, et est donc canonique. Elle ne modifie pas les variables lagrangiennes  $q, \dot{q}$  et laisse donc invariante toutes les grandeurs physiques  $F(q, \dot{q}, t)$ . Cependant, elle modifie la relation entre le moment conjugué et  $\dot{q}$ , correspondant à l'ajout d'une dérivée totale  $d\Phi(q)/dt$  au lagrangien. Pour cette raison, on peut appeler la transformation (6.66) une *transformation de jauge*.

Dans le cas d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique (voir l'Exemple 6.3), la position  $\mathbf{x}$  et la vitesse  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  sont des grandeurs observables, mais le moment conjugué  $p_i = m\dot{x}_i + (e/c)A_i$  n'est pas invariant sous une transformation de jauge du potentiel vecteur  $A_i \rightarrow A_i + \partial_i \Lambda(\mathbf{x})$ . En pratique, on a :

$$x_i \rightarrow x_i, \quad \dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i, \quad p_i \rightarrow p_i + \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}, \quad (6.67)$$

correspondant au fait que, sous une transformation de jauge, le lagrangien reste invariant à une dérivée totale près.

## 6.5 Crochets de Poisson et structure canonique

### 6.5.1 Constantes du mouvement identifiées par les crochets de Poisson

Puisque les variables canoniques décrivent complètement l'état du système mécanique, toute grandeur physique  $F$  sera décrite par une fonction des variables canoniques,  $F(q, p, t)$ , éventuellement avec une dépendance temporelle explicite.

Une question très pertinente pour la discussion de la dynamique est de savoir si une grandeur physique  $F(q(t), p(t), t)$  est une constante du mouvement. En principe, il faudrait connaître la solution  $q(t), p(t)$  des équations d'évolution puis vérifier si, en conséquence,

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (6.68)$$

De toute évidence, une telle expression n'est pas d'une grande aide puisqu'elle requiert la connaissance complète de la dynamique, alors que les constantes du mouvement devraient justement fournir des informations utiles pour déterminer celle-ci.

Comme nous l'avons vu plus haut, l'apparition de variables cycliques (typiquement liées aux symétries du lagrangien ou du Hamiltonien) fournit une information immédiate sur la conservation de ces variables. En général pourtant, pour vérifier si une fonction  $F(q, p, t)$  est unconstant du mouvement, on est confronté au problème de vérifier l'équation (6.68). Comme nous allons le voir, la formulation hamiltonienne s'avère très utile, car elle offre une solution simple à ce problème. En effet, en utilisant les équations de Hamilton, l'équation (6.68) devient

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (6.69)$$

Ainsi, on peut vérifier cette condition *sans avoir besoin de connaître la solution*  $q_i(t), p_i(t)$ , la seule expression de la fonction hamiltonienne en termes des variables canoniques étant suffisante. Aucune information aussi simple n'est fournie par le lagrangien, sauf dans le cas des variables cycliques (sans

parler de l'approche newtonienne en coordonnées cartésiennes). Cela souligne encore davantage le rôle utile de la fonction hamiltonienne.

Comme on l'a souvent constaté, étant données deux grandeurs physiques  $F(q, p, t)$  et  $G(q, p, t)$ , une notion pratique est celle du *crochet de Poisson* :

$$\{F, G\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (6.70)$$

Avec cette notation, la dérivée temporelle de  $F$  s'écrit :

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (6.71)$$

et, par conséquent, si  $F$  ne dépend pas explicitement du temps, le fait qu'il soit une constante du mouvement est équivalent à l'annulation de son crochet de Poisson avec le hamiltonien.

### Exemples.

La puissance du formalisme des crochets de Poisson pour vérifier si une grandeur physique  $F(q, p, t)$  est une constante du mouvement (sans avoir à résoudre les équations du mouvement) peut être illustrée en reprenant les exemples étudiés précédemment.

Dans l'exemple 6.4, il est immédiat de vérifier que  $\{T + V, H\} \neq 0$ , et donc que l'énergie  $T + V$ , dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , n'est pas une constante du mouvement, tandis que  $T_{\mathcal{R}'} + V + V_c$  l'est dans le référentiel en rotation  $\mathcal{R}'$ .

De même, dans les exemples 6.5 et 6.8, on trouve que  $\{T + V, H\} \neq 0$ , et donc que, là encore,  $T + V$  n'est pas une constante du mouvement.

**Exemple 6.7.** On reprend ici l'Exemple 6.7 de la Section 6.3. En utilisant les crochets de Poisson, il est immédiat de vérifier que l'énergie dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est une constante du mouvement, tandis que l'Hamiltonien  $H'$  dans le référentiel non inertiel  $\mathcal{R}'$  ne l'est pas :

$$H' = \frac{1}{2m} \left( p_\rho^2 + p_z^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} \right) + V(\rho, \varphi' - \omega t, z), \quad (6.72)$$

n'est pas une constante du mouvement, car

$$\frac{dH'}{dt} = \{H', H'\} + \frac{\partial H'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \omega = -\dot{\varphi}_\rho \omega, \quad (6.73)$$

sauf si  $V$  est indépendant de  $\varphi$ .

**Exemple 6.13.** Considérons deux particules interagissant via un potentiel  $V(x_1, x_2)$ . Ici les variables  $x_j$  indiquent une position dans l'espace cartésien en trois dimensions, et sont donc une notation compacte pour  $x_j \equiv (x_{j,1}, x_{j,2}, x_{j,3})$ . Existe-t-il des constantes du mouvement de la forme  $F(x_1, x_2)$  ou  $F(p_1, p_2)$  ?

En termes de crochets de Poisson, la condition pour que  $F(x_1, x_2)$  soit une constante du mouvement s'écrit :

$$\sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x_{1,i}} p_{1,i} + \frac{\partial F}{\partial x_{2,i}} p_{2,i} \right) = 0. \quad (6.74)$$

Comme, dans les conditions initiales, les positions et les moments peuvent être assignés indépendamment, l'équation ci-dessus impose  $\frac{\partial F}{\partial x_{1,i}} = 0 = \frac{\partial F}{\partial x_{2,i}}$ , c'est-à-dire que seules les fonctions constantes

sont autorisées. D'autre part, la condition pour que  $F(p_1, p_2)$  soit une constante du mouvement s'écrit :

$$\sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial p_{1,i}} \frac{\partial V}{\partial x_{1,i}} + \frac{\partial F}{\partial p_{2,i}} \frac{\partial V}{\partial x_{2,i}} \right) = 0. \quad (6.75)$$

Cette condition est facilement satisfaite si  $V(x_1, x_2) = V(x_1 - x_2)$ , car alors  $\frac{\partial V}{\partial x_{1,i}} = \nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial x_{2,i}}$ , et la condition devient :

$$\frac{\partial F}{\partial p_{1,i}} - \frac{\partial F}{\partial p_{2,i}} = 0. \quad (6.76)$$

Ainsi, les seules fonctions autorisées sont celles qui dépendent de la combinaison  $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ .

### 6.5.2 Propriétés générales des crochets de Poisson

Les crochets de Poisson définissent une structure algébrique très importante sur l'algèbre des fonctions régulières des coordonnées canoniques, comme discuté ci-dessous.

Afin d'éviter les aspects techniques, nous considérerons l'algèbre  $\mathcal{A}$  des fonctions réelles infiniment dérivables (brièvement  $C^\infty$ ) des variables canoniques, incluant la possibilité d'une dépendance explicite différentiable en temps,  $F(q, p, t)$ , même si, pour plus de simplicité, cette dépendance ne sera pas toujours mentionnée par la suite.

Rappelons d'abord que les opérations algébriques standard dans  $\mathcal{A}$  sont définies comme suit :

i) **Structure linéaire (espace vectoriel) :**

$$(\lambda F)(q, p) \equiv \lambda F(q, p), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(F + G)(q, p) \equiv F(q, p) + G(q, p);$$

ii) **Produit algébrique :**

$$(FG)(q, p) \equiv F(q, p) G(q, p), \quad F, G \in \mathcal{A}.$$

Le produit ainsi défini est clairement associatif :

$$(F(GK)) = ((FG)K).$$

Par conséquent,  $\mathcal{A}$  est une *algèbre associative*.

Un autre « produit » est défini par les crochets de Poisson :

$$A, B \longrightarrow \{A, B\} \in \mathcal{A},$$

avec

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right), \quad \forall A, B \in \mathcal{A}. \quad (6.77)$$

Les crochets de Poisson satisfont les propriétés générales suivantes, qui découlent directement de leur définition et se révèlent très utiles pour les calculs :

1. **Antisymétrie :**

$$\{A, B\} = -\{B, A\}. \quad (6.78)$$

2. **Linéarité dans les deux facteurs :**

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}. \quad (6.79)$$

3. (Règle de Leibniz) :

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}, \quad (6.80)$$

4. (Identité de Jacobi) :

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0. \quad (6.81)$$

L'identité de Jacobi stipule que la somme des crochets de Poisson trilineaires obtenus en permutant cycliquement les trois variables  $A, B, C$  s'annule.

Les propriétés ci-dessus caractérisent des structures mathématiques fondamentales. Étant donnée une algèbre associative, une application bilinéaire satisfaisant les propriétés 1, 2, et 4 est appelée un *crochet de Lie*. L'espace des fonctions  $F$  muni d'une application bilinéaire associative satisfaisant 1, 2, et 4 est donc une *algèbre de Lie*. Si elle satisfait en outre la propriété 3 (règle de Leibniz), on dit qu'il s'agit d'une *dérivation*, car la propriété 3 est satisfaite pour la dérivée d'un produit de fonctions.

Dans ce qui suit, une application bilinéaire satisfaisant les propriétés 1 à 4 sera appelée un *produit de Lie*. Techniquement, une algèbre associative réelle  $\mathcal{A}$  (c'est-à-dire munie d'un produit associatif), équipée d'un produit de Lie, est appelée une *algèbre de Poisson*.

Les propriétés 1)–4) impliquent le *théorème de Jacobi-Poisson*, aussi connu comme *deuxième théorème de Poisson* :

**Théorème 1.** *Le crochet de Poisson de deux constantes du mouvement est lui-même une constante du mouvement.*

*Preuve.* En effet, en utilisant l'identité de Jacobi, on obtient :

$$\frac{d\{A, B\}}{dt} = \{\{A, B\}, H\} + \frac{\partial\{A, B\}}{\partial t} \quad (6.82)$$

$$= -\{\{H, A\}, B\} - \{\{B, H\}, A\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\}. \quad (6.83)$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\frac{d\{A, B\}}{dt} = \left\{ \frac{dA}{dt}, B \right\} + \left\{ A, \frac{dB}{dt} \right\} = 0. \quad (6.84)$$

□

Ce résultat n'est pas aussi trivial qu'il pourrait le paraître : la règle de Leibniz s'applique à la dérivée temporelle agissant sur les crochets de Poisson, grâce à l'identité de Jacobi.

### 6.5.3 Structure canonique

Pour les applications, il est utile de considérer les crochets de Poisson de certaines quantités physiques fondamentales.

Commençons par les variables canoniques  $q, p$ . D'après la définition, équation (6.70), on obtient facilement :

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (6.85)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker,  $\delta_{ij} = 1$  pour  $i = j$ , et zéro sinon.

Les crochets de Poisson ci-dessus sont appelés les *crochets de Poisson canoniques*. Pour toutes les fonctions  $F(q, p)$  qui admettent un développement de Taylor en puissances de  $q_i$  et  $p_i$ , on peut montrer que (6.85) contient toute l'information donnée par la définition explicite des crochets de

Poisson ; ils peuvent être utilisés pour définir un produit de Lie unique satisfaisant les propriétés 1 à 4, qui coïncide avec le crochet de Poisson défini explicitement par l'équation (6.70). En effet, à partir de (6.85) et des propriétés 1 à 4, nous pouvons calculer  $\{q_i, p_j p_k\}$ ,  $\{q_i, p_j q_k\}$ ,  $\{q_i, q_j q_k\}$ , et par récurrence, nous pouvons donc calculer les crochets de Poisson de fonctions qui admettent un développement de Taylor.

D'après la définition des crochets de Poisson, on a également :

$$\{q_i, B(q, p, t)\} = \frac{\partial B}{\partial p_i}, \quad \{p_i, B(q, p, t)\} = -\frac{\partial B}{\partial q_i}. \quad (6.86)$$

les fonctions  $F(q, p)$  qui admettent un développement de Taylor en puissances de  $q_i$  et  $p_i$ , ces relations découlent directement des crochets canoniques (6.85). Il peut être utile de remarquer que les équations (6.85) et (6.86) ont un équivalent en mécanique quantique.

Considérons maintenant les crochets de Poisson du moment angulaire  $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$ . On obtient (la somme sur les indices répétés est implicite) :

$$\{x_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} x_k, \quad \{p_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} p_k, \quad (6.87)$$

et

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_1, L_2\} = L_3, \quad \{L_1, L_3\} = -L_2, \quad \{L_2, L_3\} = L_1. \quad (6.88)$$

Enfin, on obtient :

$$\{L^2, L_i\} = L_j \{L_j, L_i\} + \{L_j, L_i\} L_j = \epsilon_{jik} (L_j L_k + L_k L_j) = 0. \quad (6.89)$$

Les exemples suivants illustrent l'utilité de cette structure canonique, en combinant les propriétés 1-4 et les équations (6.85)-(6.89).

**Exemple 6.14.** Si deux composantes du moment angulaire sont des constantes du mouvement, la troisième l'est également.

En effet, si  $L_1$  et  $L_2$  sont des constantes du mouvement, le théorème de Jacobi-Poisson (équation (6.84)) implique que  $L_3 = \{L_1, L_2\}$  est aussi une constante du mouvement.

**Exemple 6.15.** Considérons deux oscillateurs harmoniques avec une interaction mutuelle décrite par un potentiel  $V(|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|)$ . Le Hamiltonien est alors donné par :

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{P}^{(1)2} + \mathbf{P}^{(2)2}) + \frac{1}{2} (k_{(1)}^2 \mathbf{x}_{(1)}^2 + k_{(2)}^2 \mathbf{x}_{(2)}^2) + V(|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|). \quad (6.90)$$

Que peut-on dire des constantes du mouvement ? Comme précédemment, aucune fonction  $F(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$  n'est une constante du mouvement. En exploitant l'indépendance des conditions initiales pour les positions et les moments, on conclut qu'il n'existe aucune constante du mouvement de la forme  $F(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ . Des fonctions intéressantes sont les moments angulaires des deux oscillateurs  $\mathbf{L}^{(1)}$ ,  $\mathbf{L}^{(2)}$ . En utilisant les équations précédentes (6.85, 6.86, 6.87), on obtient :

$$\begin{aligned} \{L_i^{(1)}, H\} &= \epsilon_{ijk} p_k^{(1)} p_j^{(1)} / m - \epsilon_{ijk} x_k^{(1)} (k_{(1)}^2 x_j^{(1)}) + \frac{\partial V}{\partial x_j^{(1)}} \\ &= V' \epsilon_{ijk} \frac{x_j^{(1)} x_k^{(2)}}{|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|} \neq 0, \quad \{L_i^{(2)}, H\} = V' \epsilon_{ijk} \frac{x_j^{(2)} x_k^{(1)}}{|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|} \neq 0, \end{aligned} \quad (6.91)$$

et

$$\{L_i^{(1)} + L_i^{(2)}, H\} = 0. \quad (6.92)$$

**Exemple 6.16.** (*Variables canoniques sphériques et cylindriques*) Il s'agit d'un exercice instructif de vérifier que la transformation des variables canoniques cartésiennes vers des variables sphériques ou cylindriques est canonique.

**Variables canoniques sphériques**

Il est commode d'écrire la transformation sous forme matricielle, avec les coordonnées exprimées sous forme de colonne :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (6.93)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{v} = \dot{r} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + r \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + r \sin \theta \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

Ainsi, (l'exposant  $T$  indique la transposée dans la multiplication matricielle) :

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 + (r \sin \theta \dot{\varphi})^2 \right). \quad (6.95)$$

Les moments conjugués sont :

$$p_r = m \dot{r}, \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

et donc

$$T = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right). \quad (6.96)$$

Il est utile d'exprimer le moment angulaire  $\mathbf{L} = m \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$  en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{L} = m r^2 \left[ \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \sin \theta \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \right] = p_\theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{p_\varphi}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}. \quad (6.97)$$

En particulier,  $L_z = p_\varphi$ . Il est clair que  $\{L_z, T\} = 0$ , un résultat déjà obtenu précédemment. En fait, on a également  $\{L_x, T\} = 0$ , et donc, d'après le théorème de Jacobi,  $\{L_y, T\} = 0$ .

**Variables canoniques cylindriques**

Comme précédemment, il est commode d'écrire la transformation des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées cylindriques sous forme matricielle :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.98)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.99)$$

On a alors :

$$T = \frac{1}{2} m \left( \dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2m} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right), \quad (6.100)$$

avec

$$p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Pour le moment angulaire en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \rho \sin \varphi p_z - z \sin \varphi p_\rho - z \cos \varphi p_\varphi / \rho \\ -\rho \cos \varphi p_z + z \cos \varphi p_\rho - z \sin \varphi p_\varphi / \rho \\ p_\varphi \end{pmatrix}. \quad (6.101)$$

Il est clair que la transformation  $\mathbf{x}, \mathbf{p} \rightarrow (r, \theta, \varphi), (p_r, p_\theta, p_\varphi)$  définie ci-dessus, reliant les coordonnées canoniques cartésiennes aux variables canoniques sphériques, satisfait l'équation (3.5) (la définition des moments canoniques étant conforme), et est donc canonique. La même propriété vaut pour la transformation qui relie les coordonnées canoniques cartésiennes aux coordonnées canoniques cylindriques :  $\mathbf{x}, \mathbf{p} \rightarrow (\rho, \varphi, z), (p_\rho, p_\varphi, p_z)$ . Cela implique que les coordonnées canoniques sphériques et cylindriques satisfont toutes deux les équations (6.85) et (6.86).

#### 6.5.4 Invariance des crochets de Poisson sous les transformations canoniques

Étant donnée une transformation canonique  $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$ , pour deux grandeurs physiques  $A$  et  $B$ , on peut définir les crochets de Poisson en utilisant deux ensembles différents de variables canoniques :

$$\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right), \quad (6.102)$$

et

$$\{A, B\}_{Q,P} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial Q_i} \frac{\partial B}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i} \frac{\partial B}{\partial Q_i} \right), \quad (6.103)$$

où, dans les équations (6.103), les nouvelles fonctions  $A$  et  $B$  sont définies par  $A(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t)$  et  $B(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t)$ .

Une propriété très importante et utile est que ces deux définitions coïncident — *invariance des crochets de Poisson sous les transformations canoniques*. En effet, en introduisant les vecteurs

$$\begin{aligned} x &= (x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n, x_{n+1} = p_1, \dots, x_{2n} = p_n), \\ y &= (y_1 = Q_1, \dots, y_n = Q_n, y_{n+1} = P_1, \dots, y_{2n} = P_n), \end{aligned}$$

(voir la Section 6.4) et en notant  $J$  le jacobien de la transformation, on a (avec somme sur  $k$  implicite)  $\partial A / \partial x_i = \partial A / \partial y_k J_{ki}$ . Ainsi :

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) = \sum_{i,j=1}^{2n} \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} G_{ij} \frac{\partial B}{\partial x_j} \right), \quad (6.104)$$

où  $G$  est défini par l'équation (6.52), et grâce à l'équation (6.56) (somme sur les indices répétés implicite), on obtient :

$$\{A, B\}_{q,p} = \frac{\partial A}{\partial y_i} J_{ij} G_{jk} J_{lk} \frac{\partial B}{\partial y_l} = \frac{\partial A}{\partial y_i} G_{ik} \frac{\partial B}{\partial y_k} = \{A, B\}_{Q,P}. \quad (6.105)$$

La réciproque est également vraie puisque l'on peut écrire le jacobien sous la forme d'une matrice bloc  $2 \times 2$  :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix},$$

avec

$$(J_1)_{ij} \equiv \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}, \quad (J_2)_{ij} \equiv \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}, \quad (J_3)_{ij} \equiv \frac{\partial P_i}{\partial q_j}, \quad (J_4)_{ij} \equiv \frac{\partial P_i}{\partial p_j},$$

les indices  $i, j$  variant de 1 à  $n$ .

Alors :

$$(JGJ^T) = \begin{pmatrix} \{Q_i, Q_j\}_{q,p} & \{Q_i, P_j\}_{q,p} \\ \{P_i, Q_j\}_{q,p} & \{P_i, P_j\}_{q,p} \end{pmatrix}, \quad (6.106)$$

de sorte que, si les crochets de Poisson sont préservés,  $\{A, B\}_{q,p} = \{A, B\}_{Q,P}$ , le second membre de l'équation (6.106) est  $G$ , c'est-à-dire que la transformation est canonique.

En conséquence de cette équivalence, on peut adopter la définition suivante :

*Une transformation des variables canoniques est canonique si elle laisse invariants les crochets de Poisson, c'est-à-dire si, pour une transformation donnée  $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$ , on a :*

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}. \quad (6.107)$$

La propriété d'invariance des crochets de Poisson mentionnée ci-dessus peut être exploitée pour simplifier leur calcul.

**Exemple 6.17.** En utilisant l'équation (6.97), il est facile de vérifier que  $\{\mathbf{L}, F(r)\} = 0$ , avec  $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$ . Le calcul, assez long en coordonnées canoniques cartésiennes, peut être remplacé par un calcul trivial si l'on utilise les variables canoniques sphériques pour évaluer le crochet de Poisson. En effet, dans ce cas, la seule contribution non nulle aux crochets de Poisson de  $F(r)$  provient de  $\partial F(r)/\partial r$ , tandis que, d'après l'équation (6.97), on a  $\partial \mathbf{L}/\partial p_r = 0$ .

**Exemple 6.18.** Il est facile de vérifier que, pour une particule unique,  $\{L_i, T\} = 0$ . Le calcul est trivial en utilisant les variables canoniques cartésiennes : d'après les équations (6.80), (6.86) et (6.87), on obtient immédiatement

$$\{L_i, \sum_l p_l p_l\} = \sum_{lk} \varepsilon_{ilk} (p_k p_l + p_l p_k) = 0. \quad (6.108)$$

**Exemple 6.19.** Considérons le mouvement d'une particule dans un potentiel central  $V(r)$  dans un référentiel en rotation  $\mathcal{R}'$  avec une vitesse angulaire constante  $\boldsymbol{\omega}$  (comme dans l'Exemple 6.7). Alors,  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}$  est une constante du mouvement. En effet, en utilisant les variables sphériques avec l'axe  $z$  orienté selon l'axe de rotation, on a  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = p_\varphi \omega$ , et  $H = T + V(r) - p_\varphi \omega$ . (En utilisant le résultat précédent  $\{L_i, T\} = 0$ ), on obtient :

$$\{p_\varphi, H\} = \{p_\varphi, T + V - p_\varphi \omega\} = 0. \quad (6.109)$$

**Exemple 6.20.** Considérons le cas de l'Exemple 6.19 et une grandeur vectorielle physique  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . On cherche à déterminer sa variation temporelle dans le référentiel en rotation  $\mathcal{R}'$ .

Dans  $\mathcal{R}'$ , la grandeur  $\mathbf{J}$  est décrite par la fonction suivante des coordonnées du référentiel tournant  $\mathbf{J}'(\mathbf{x}', \mathbf{p}') = \mathbf{J}(\mathbf{x}(\mathbf{x}', t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t))$ , et par conséquent :

$$\frac{d\mathbf{J}'}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial x'_i} \dot{x}'_i + \frac{\partial \mathbf{J}'}{\partial p'_i} \dot{p}'_i \right) = \{\mathbf{J}', H'\}_{x', p'}. \quad (6.110)$$

Grâce à l'invariance des crochets de Poisson sous les transformations canoniques, on peut calculer les crochets de Poisson précédents en utilisant les variables canoniques  $q, p$  et en notant que  $H' = H - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$  (voir l'Exemple 6.7). On a alors :

$$\{\mathbf{J}', H'\}_{x', p'} = \{\mathbf{J}, H - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}\}_{x, p} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \cdot \{\mathbf{L}, \mathbf{J}\}_{x, p}. \quad (6.111)$$

Un cas particulier intéressant est celui où  $\mathbf{J} = \mathbf{L}$  ; dans ce cas, dans un référentiel tournant, la dérivée temporelle de  $\mathbf{L}$  est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \{\mathbf{L}, H\} - \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}. \quad (6.112)$$

**Exemple 6.21. Équations de Bloch.** Le hamiltonien d'un toupie symétrique libre, dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , est donné par :

$$H = T = \frac{\mathbf{J}^2}{2I}, \quad (6.113)$$

où  $I$  désigne le moment d'inertie et  $\mathbf{J}$  le moment angulaire.

Si la toupie porte une charge, un moment magnétique  $\mathbf{M} = \mu\mathbf{J}$  est associé à son moment angulaire, de sorte qu'en présence d'un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$ , le hamiltonien acquiert un terme additionnel  $-\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}$ . On veut discuter l'évolution temporelle de  $\mathbf{J}$ .

En utilisant les crochets de Poisson, on obtient facilement l'évolution temporelle suivante :

$$\frac{dJ_i}{dt} = \mu B_j \{J_j, J_i\} = -\mu(\mathbf{B} \wedge \mathbf{J})_i. \quad (6.114)$$

Ainsi, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation avec une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega} = -\mu\mathbf{B}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , d'après l'équation (6.112), on a  $d\mathbf{J}'/dt = 0$ . Autrement dit, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbf{J}$  subit une précession uniforme, avec une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}$  autour de l'axe dirigé selon le champ magnétique.

**Remarque 6.2.** Une structure similaire apparaît également dans le cas où une grandeur physique  $\mathbf{J}$ , dont les composantes  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont associées à des crochets de Poisson de la même forme que ceux du moment angulaire (équations (6.88)),

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k,$$

sans qu'il soit nécessaire de supposer l'existence de variables canoniques correspondantes  $q, p$ . C'est le cas du moment angulaire intrinsèque, ou *spin*  $S$ , d'une particule, les seules propriétés intervenant étant les crochets de Poisson :

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k, \quad (6.115)$$

caractéristiques d'un moment angulaire. Si un moment magnétique  $\mathbf{M} = \mu\mathbf{S}$  est associé à  $\mathbf{S}$ , alors en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , il existe un couplage avec le champ magnétique donné par  $\mu\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ . L'évolution temporelle est alors décrite par des équations de la même forme que celles des équations de Bloch, et l'on observe une précession analogue à celle décrite précédemment.

Cela illustre encore la puissance de la mécanique hamiltonienne par rapport à la mécanique newtonienne cartésienne, en couvrant des cas qui n'ont pas d'analogue en termes de coordonnées cartésiennes.

**Remarque 6.3.** Il est important de souligner que la structure canonique, et en particulier le caractère canonique d'une transformation, est *indépendante de la dynamique*, c'est-à-dire du choix possible de l'Hamiltonien. Elle caractérise la structure géométrique de la variété munie des coordonnées locales  $q, p$ .

## 6.6 Transformations canoniques et fonctions génératrices

La caractérisation des transformations canoniques discutée au chapitre précédent, en termes des équations (6.56) ou de l'invariance des crochets de Poisson, est d'un côté plutôt simple, mais de l'autre elle n'est pas constructive.

Dans ce qui suit, nous allons présenter une stratégie constructive fondée sur la caractérisation par les fonctions génératrices, dont la propriété essentielle est que, grâce à de simples opérations impliquant leurs dérivées, elles définissent des transformations des variables canoniques, garanties d'être canoniques. À cette fin, il est utile de disposer de la caractérisation alternative suivante des transformations canoniques.

Une transformation des variables canoniques

$$q, p \longrightarrow Q(q, p, t), \quad P(q, p, t)$$

est équivalentement identifiée par les formules inverses

$$q_i = q_i(Q, P, t), \quad p_i = p_i(Q, P, t). \quad (6.116)$$

De façon plus générale, on peut définir une transformation canonique en assignant  $2n$  relations inversibles entre les nouvelles et les anciennes variables canoniques. Par exemple, si les  $2n$  coordonnées  $q, Q$  sont fonctionnellement indépendantes, on peut exprimer les autres coordonnées en fonction de celles-ci, et la transformation canonique (8.1) peut être équivalentement caractérisée par les  $2n$  relations (inversibles) suivantes :

1)

$$p_i = p_i(q, Q, t), \quad P_i = P_i(q, Q, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.117)$$

En effet, en inversant les  $n$  secondes relations, on peut obtenir les  $q$  comme fonctions de  $Q, P$  :  $q_i = q_i(Q, P, t)$ , et en substituant ces expressions dans les  $n$  premières relations, on obtient aussi les  $p_i$  comme fonctions de  $Q, P$ . De cette manière, on retrouve la forme de l'équation (8.1).

De façon analogue, selon que les  $2n$  coordonnées  $(q, P)$ , ou  $(p, Q)$ , ou  $(p, P)$  sont fonctionnellement indépendantes, on peut caractériser la transformation canonique (8.1) en donnant l'un des ensembles suivants de relations (inversibles) :

2)

$$p_i = p_i(q, P, t), \quad Q_i = Q_i(q, P, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.118)$$

3)

$$q_i = q_i(p, Q, t), \quad P_i = P_i(p, Q, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.119)$$

4)

$$q_i = q_i(p, P, t), \quad Q_i = Q_i(p, P, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.120)$$

L'étape suivante consiste à formuler la condition de canonicité en termes des relations 1)–4).

On rappelle ici les deux définitions équivalentes d'une transformation canonique  $Q_i = Q_i(q, p, t)$ ,  $P_i = P_i(q, p, t)$  :

- La transformation est canonique si et seulement si il existe un nouvel Hamiltonien  $K(Q, P, t)$  tel que les nouvelles variables satisfont les équations de Hamilton associées à  $K$  :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K(Q, P, t)}{\partial Q_i}. \quad (6.121)$$

- La transformation est canonique si et seulement si les crochets de Poisson sont invariants, c'est-à-dire si les relations (6.107) sont satisfaites.

Revenons au principe de moindre action. Ce principe affirme que la solution des équations du mouvement correspond à un extremum de l'action. Nous avons exprimé l'action comme une intégrale du Lagrangien, mais nous pouvons également l'exprimer en fonction de l'Hamiltonien à l'aide de la transformation de Legendre. La condition d'extremum est :

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0.\end{aligned}\quad (6.122)$$

De manière analogue, en appliquant le principe de moindre action de Hamilton au nouveau lagrangien  $L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, P, t), \dot{q}(Q, P, t), t)$ , on obtient

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L'(Q, \dot{Q}, t) dt \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right] dt = 0.\end{aligned}\quad (6.123)$$

Nous savons que, sous un changement de coordonnées, la covariance du Lagrangien implique que  $L$  et  $L'$  peuvent être reliés par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction  $F$ , telle que

$$\frac{dF}{dt} = L' - L.\quad (6.124)$$

La fonction  $F$ , dite *fonction génératrice*, peut être toute fonction « bien comportée », possédant des dérivées secondes continues par rapport aux anciennes et aux nouvelles variables canoniques  $p, q, P, Q$  ainsi qu'au temps  $t$ . Les intégrands des équations (6.122) et (6.123) sont donc reliés par

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \lambda \left[ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right] + \frac{dF}{dt},\quad (6.125)$$

Dans l'équation (6.125),  $\lambda$  représente une éventuelle transformation d'échelle. Une transformation d'échelle, par exemple un changement d'unités, est triviale et sera supposée absorbée dans les coordonnées, de sorte que  $\lambda = 1$ . Le cas où l'on suppose  $\lambda \neq 1$  est appelé une transformation canonique étendue.

Les quatre types de transformations (8.3)-(8.6) correspondent à quatre types de fonctions génératrices :  $F_1(q, Q, t)$ ,  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$  et  $F_4(p, P, t)$ .

**Type 1 :** Posons  $F = F_1(q, Q, t)$ . La dérivée temporelle totale de la fonction génératrice  $F$  est donnée par

$$\frac{dF(q, Q, t)}{dt} = \sum_i \left[ \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right] + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}.\quad (6.126)$$

En insérant l'équation (6.126) dans l'équation (6.125), et en supposant que le facteur d'échelle trivial soit  $\lambda = 1$ , on obtient

$$\left[ p_i - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i - H(q, p, t) = \left[ P_i + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} \right] \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t},\quad (6.127)$$

où nous avons introduit la notation de la somme implicite sur les index répétés, que nous allons utiliser dans la suite de cette section pour ne pas alourdir la notation. On doit maintenant faire attention à la manière dont le principe de moindre action est exprimé pour l'Hamiltonien. Dans la deuxième égalité (6.122) on cherche un extremum dans un espace de phase étendu, défini par  $4n$  variables  $(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i)$  (en réalité, l'intégrand ne dépend pas de  $\dot{p}_i$ ). Dans l'idée de la recherche des trajectoires dans l'espace des phases donc, les variables  $\dot{q}_i$  sont indépendantes des  $q_i$  et des  $p_i$ . Le même argument s'applique aux variables  $\dot{Q}_i$  dans la deuxième égalité dans (6.123). Par conséquent, l'égalité (6.127) doit être valable pour toute valeur de  $\dot{q}_i$  et  $\dot{Q}_i$ , qui sont indépendantes des autres variables. La seule manière de réaliser l'égalité est donc que chaque terme soit indépendamment nul. On a donc

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i}, \quad P_i = - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i}, \quad (6.128)$$

de sorte que les termes entre crochets s'annulent. Les termes restants dans (6.127) donnent finalement

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}. \quad (6.129)$$

Les trois relations (6.128)-(6.129) définissent la transformation canonique induite par la fonction génératrice  $F_1(q, Q, t)$ .

**Type 2 :** Posons  $F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$ . La dérivée temporelle totale de la fonction génératrice  $F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$  est donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \left[ \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i} \dot{P}_i - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i \right] + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}. \quad (6.130)$$

En insérant (6.130) dans l'équation (6.125), et en supposant encore  $\lambda = 1$ , on obtient, après réarrangement,

$$\left[ p_i - \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i - \left[ Q_i - \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i} \right] \dot{P}_i - K(Q, P, t) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0. \quad (6.131)$$

Comme avant,  $\dot{q}_i$  et  $\dot{P}_i$  sont des variables indépendantes et, pour satisfaire l'égalité (6.131), les termes entre parenthèses doivent s'annuler, ce qui donne :

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i}. \quad (6.132)$$

L'équation (6.131) conduit à l'expression pour le nouvel Hamiltonien

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}. \quad (6.133)$$

**Type 3 :** Posons  $F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i$ . La dérivée totale par rapport au temps de la fonction génératrice  $F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i$  est donnée par

$$\frac{dF(q, Q, t)}{dt} = \left[ \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \dot{q}_i p_i + q_i \dot{p}_i \right] + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial t}. \quad (6.134)$$

Insérons cette expression dans l'équation (6.125), et supposons que le facteur d'échelle trivial soit  $\lambda = 1$  ; on obtient alors

$$0 = \left[ q_i + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_i} \right] \dot{p}_i + \left[ P_i + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_i} \right] \dot{Q}_i + K(Q, P, t) - H(q, p, t) - \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial t}. \quad (6.135)$$

Comme avant,  $\dot{p}_i$  et  $\dot{Q}_i$  sont des variables indépendantes et, pour satisfaire l'égalité (6.135), les termes entre parenthèses doivent s'annuler, ce qui donne :

$$q_i = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q_i}, \quad (6.136)$$

ce qui conduit à la transformation requise

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial t}. \quad (6.137)$$

**Type 4 :** Posons  $F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$ . La dérivée totale par rapport au temps de la fonction génératrice  $F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$  est donnée par

$$\frac{dF}{dt} = \left[ \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_i} \dot{P}_i + \dot{q}_i p_i + q_i \dot{p}_i - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i \right] + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t}. \quad (6.138)$$

Insérons cette expression dans l'équation (6.125), et supposons que le facteur d'échelle trivial soit  $\lambda = 1$  ; on obtient alors

$$0 = \left[ q_i + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_i} \right] \dot{p}_i + \left[ -Q_i + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_i} \right] \dot{P}_i + K(Q, P, t) - H(q, p, t) - \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t}. \quad (6.139)$$

Comme avant,  $\dot{p}_i$  et  $\dot{P}_i$  sont des variables indépendantes et, pour satisfaire l'égalité (6.139), les termes entre parenthèses doivent s'annuler, ce qui donne :

$$q_i = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_i}, \quad (6.140)$$

ce qui conduit à la transformation requise

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t}. \quad (6.141)$$

**Remarque 6.4.** Notons que les trois dernières fonctions génératrices exigent l'inclusion de produits bilinéaires supplémentaires de  $q$ ,  $p$ ,  $Q$ ,  $P$  afin que les termes se compensent pour donner le résultat souhaité. L'ajout de ces termes bilinéaires garantit que la fonction génératrice résultante  $F$  est la même, que l'on utilise n'importe laquelle des quatre fonctions génératrices  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ . Fréquemment, la fonction génératrice  $F_2(q, P, t)$  est la plus commode.

**Remarque 6.5.** Une transformation canonique n'a pas besoin de se conformer à une seule des quatre fonctions génératrices  $F_k$  pour tous les degrés de liberté ; elle peut être un mélange de différentes formes pour les différents degrés de liberté.

Les propriétés des fonctions génératrices sont résumées dans le tableau 6.1.

**Remarque 6.6.** Il est utile de noter que la caractérisation des transformations canoniques en termes de fonctions génératrices a l'avantage de fournir directement la transformation de l'Hamiltonien, information qui n'est pas donnée de manière explicite par la seule invariance des crochets de Poisson.

**Exemple 6.22.** Déterminer les transformations canoniques définies par les fonctions génératrices suivantes :

$$\begin{aligned} 1) F_1 &= \sum_i q_i Q_i, & 2) F_2 &= \sum_i q_i P_i, \\ 3) F_3 &= \sum_i p_i Q_i, & 4) F_4 &= \sum_i p_i P_i. \end{aligned}$$

Generating function	Generating function derivatives	Trivial special examples
$F = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$
$F = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i, \quad Q_i = q_i, \quad P_i = p_i$
$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = p_i Q_i, \quad Q_i = -q_i, \quad P_i = -p_i$
$F = F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = p_i P_i, \quad Q_i = p_i, \quad P_i = -q_i$

Table 6.1: Résumé des propriétés des quatre types de fonctions génératrices

1. Pour  $F_1$ , on obtient immédiatement :

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q_i} = -q_i, \quad (6.142)$$

c'est-à-dire que la transformation échange les variables de "position"  $q$  avec les moments  $p$ .

2. Pour  $F_2$ , on a :

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2(q, P)}{\partial P_i} = q_i, \quad (6.143)$$

c'est-à-dire que  $F_2$  définit la *transformation identité*.

3. Pour  $F_3$ , la transformation revient à changer le signe des  $q_i$  et des  $p_i$ . Dans le cas des coordonnées cartésiennes, une telle transformation correspond à la *transformation de parité*.
4. Pour  $F_4$ , on obtient la même transformation canonique que celle définie par  $F_1$ .

Les transformations canoniques précédentes montrent également que, dans la formulation hamiltonienne, toutes les variables canoniques sont sur un pied d'égalité, la séparation entre positions et moments n'étant pas stable sous les transformations canoniques. Ainsi, alors que dans la formulation lagrangienne l'espace fondamental est l'espace des positions de dimension  $n$  (toutes sur un même pied), dans la formulation hamiltonienne l'espace de base est l'*espace des phases*, composé des  $2n$  variables canoniques  $q, p$ .

**Exemple 6.23.** Déterminer les fonctions génératrices des transformations canoniques suivantes, pour simplifier dans le cas d'une particule unique :

- a) *Transformation galiléenne hamiltonienne* des variables hamiltoniennes

$$x'_i = x_i - w_i t, \quad p'_i = p_i - m w_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.144)$$

- b) *Changement de référentiel en rotation*, correspondant aux coordonnées lagrangiennes dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  qui tourne avec une vitesse angulaire uniforme  $\omega$  (voir l'Exemple 6.7) :

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi - \omega t, \quad z' = z; \quad p'_\rho = p_\rho, \quad p'_z = p_z, \quad p'_\varphi = p_\varphi. \quad (5.17)$$

- a) Pour simplifier, discutons le cas d'un seul degré de liberté, avec  $m = 1$ . Les paires  $(x, x')$  et  $(p, p')$  ne sont pas des variables fonctionnellement indépendantes, tandis que les paires  $(x, p')$  et  $(p, x')$  le sont ; les cas II) et III) s'appliquent donc.

La fonction génératrice  $F_{II}$  peut être déterminée en résolvant les équations (6.132) :

$$\frac{\partial F_{II}(x, p')}{\partial x} = p = p' + v, \quad \Rightarrow \quad F_{II} = (p' + v)x + f(p'), \quad (6.145)$$

$$\frac{\partial F_{II}}{\partial p'} = x' = x + vt, \quad \Rightarrow \quad f(p') = -p'vt. \quad (6.146)$$

D'après l'équation (6.133), on obtient

$$H'(x', p') = H(x(x'), p(p')) - p'v,$$

et dans le cas libre

$$H'(x', p') = \frac{1}{2}(p' + v)^2 - p'v.$$

La fonction génératrice  $F_{III}(p, x')$  est obtenue en résolvant les équations (6.136) : la première donne

$$F_{III} = -p(x' + vt) + g(x'),$$

et la seconde implique  $g(x') = x'v$ .

- b) Dans ce cas, les paires de coordonnées fonctionnellement indépendantes sont  $(q, P)$  et  $(p, Q)$ . On montre facilement que la fonction génératrice correspondant au cas II est

$$F_{II} = \rho p_\rho + z p_z + \varphi p_\varphi - \omega t p_\varphi = \rho p_\rho + z p_z + \varphi p_\varphi - \omega t p_\varphi, \quad (6.147)$$

et

$$H' = H - \omega \varphi = H - \omega \mathbf{L}.$$

La fonction génératrice  $F_{III}$  peut être déterminée de manière analogue :

$$F_{III} = -(p_\rho \rho + p_z z + p_\varphi(\varphi' + \omega t)). \quad (6.148)$$

**Remarque 6.7.** Il est utile de noter qu'il existe une certaine ambiguïté lorsqu'on identifie la transformation des variables canoniques correspondant à un changement de référentiel en mouvement. En effet, selon la Section 6.3, par exemple pour une particule libre de masse unitaire, la *transformation galiléenne des coordonnées lagrangiennes*  $x'_i = x_i - w_i t$ ,  $\dot{x}'_i = \dot{x}_i - w_i$ , conduit à

$$p'_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'_i} = p_i = \dot{x}_i.$$

D'un autre côté, la transformation vers un référentiel en mouvement correspond à une *transformation galiléenne hamiltonienne* et peut être représentée par

$$Q_i = x_i - w_i t, \quad P_i = p_i - w_i.$$

Le conflit apparent est résolu en notant que le moment canonique n'est pas défini de manière unique, puisqu'il change lorsqu'on ajoute une dérivée totale au Lagrangien (ce qui ne modifie pas les équations du mouvement). Les deux transformations sont canoniques, puisqu'elles laissent invariants les crochets de Poisson, mais l'interprétation physique des moments canoniques est très différente. Dans le premier cas, le Hamiltonien dans les nouvelles variables canoniques est

$$H_{x', p'} = \left[ \frac{1}{2} p_i'^2 - p'_i v_i \right]$$

(voir l'Exemple 6.6 ou utiliser le générateur  $F_{II}$  et l'équation correspondant à (6.132)). On obtient alors que

$$\dot{x}'_i = p'_i - w_i$$

et  $p'_i$  n'est pas la vitesse dans le référentiel en mouvement. Dans le deuxième cas, le Hamiltonien est

$$H_{Q,P} = \left[ \frac{1}{2}(P_i + w_i)^2 - P_i w_i \right],$$

et

$$\dot{Q}_i = P_i,$$

c'est-à-dire que les variables canoniques  $Q_i, P_i$  ont l'interprétation physique de la position et du moment dans le référentiel en mouvement.

**Exemple 6.24.** Déterminer la fonction génératrice de la transformation canonique (6.50), (6.51) :

$$Q_i = Q_i(q, t), \quad P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}. \quad (6.149)$$

En inversant la transformation canonique,  $q_i = q_i(Q, t)$ , la relation entre les  $p$  et les  $P$  peut aussi s'écrire

$$p_i = \sum_j P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

En utilisant alors  $q, P$  comme variables indépendantes (cas II), la première équation de (6.132) donne

$$F_{II} = \sum_j Q_j(q, t) P_j + g(P, t),$$

et la seconde implique

$$g(P, t) = \text{const.}$$

## 6.7 L'équation de Hamilton–Jacobi

On a vu qu'après une transformation canonique, le nouvel Hamiltonien s'écrit

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (6.150)$$

Peut-on trouver  $F$  tel que  $K = 0$  ? Si c'est le cas, alors les nouvelles variables  $Q_i$  et  $P_i$  sont des constantes : ce sont des intégrales premières si on les considère comme des fonctions des anciennes variables et du temps. Les équations reliant les  $p_i, q_i$  aux  $P_i, Q_i$  fournissent alors directement la dépendance temporelle de  $q_i$  et  $p_i$ , c'est-à-dire la solution du problème dynamique. Pour être plus précis, on cherche s'il existe une fonction  $F_2(q_i, P_i, t)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \\ H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \end{array} \right. \quad (6.151)$$

avec la condition implicite que les  $2n$  équations reliant les  $p_i, q_i$  aux  $P_i, Q_i$  conduisent à des relations cohérentes faisant effectivement de  $P_i, Q_i$  des variables canoniques, c'est-à-dire satisfaisant les

crochets de Poisson canoniques. Comme  $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ , la troisième équation du système (6.151) peut être réécrite

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \quad (6.152)$$

Cette équation est l'équation de Hamilton–Jacobi sous sa forme générale. C'est une condition nécessaire que doit satisfaire  $F_2(q_i, P_i, t)$  pour que le nouvel Hamiltonien soit identiquement nul.

**Définition :** L'équation aux dérivées partielles

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (6.153)$$

dans l'espace des fonctions à  $n + 1$  variables  $f(q_1, \dots, q_n, t)$  s'appelle *l'équation d'Hamilton–Jacobi*. Comme cette équation fait intervenir  $n + 1$  dérivées partielles, sa solution générale, si elle existe, doit dépendre de  $n + 1$  constantes d'intégration  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ . Par ailleurs, comme elle ne fait intervenir que les dérivées de  $f$ , si  $f$  est solution, alors  $f + c$ , où  $c$  est une constante, est aussi solution. Une des constantes est donc une constante additive. Autrement dit, la solution générale de l'équation d'Hamilton–Jacobi, si elle existe, peut s'écrire sous la forme

$$f(q_1, \dots, q_n, t) = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + \alpha_{n+1}. \quad (6.154)$$

Revenons à notre problème initial et considérons la transformation génératrice

$$F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n, t) \equiv S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1 = P_1, \dots, \alpha_n = P_n; t).$$

Comme  $S$  est solution de l'équation d'Hamilton–Jacobi,  $F_2$  satisfait l'équation (6.153). Par ailleurs, on peut démontrer que si  $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$  est la solution générale du problème, alors les équations

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \end{cases} \quad (6.155)$$

conduisent à des expressions indépendantes pour les  $P_i$  et  $Q_i$ , assurant qu'il s'agit d'une transformation canonique. La fonction  $F_2$  ainsi définie constitue donc la solution du problème initial (équation (6.151)).

En pratique, on procède de la manière suivante :

1. Écrire l'équation de Hamilton–Jacobi

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}, t\right) = 0. \quad (6.156)$$

2. Chercher la solution générale

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n; t)$$

en omettant la constante additive  $\alpha_{n+1}$ .

3. En déduire la fonction génératrice  $F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t)$  qui conduit à  $K = 0$ , définie par

$$F_2(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n; t) \equiv S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1 = P_1, \dots, \alpha_n = P_n; t). \quad (6.157)$$

4. Exprimer les  $q_i$  et  $p_i$  en fonction des  $Q_i$  et  $P_i$  à l'aide des équations

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \end{cases} \quad (6.158)$$

Comme les  $Q_i$  et  $P_i$  sont des constantes, on a obtenu la solution générale du problème. Les constantes  $Q_i$  et  $P_i$  peuvent ensuite être ajustées pour satisfaire les conditions aux limites sur  $q_i(t)$  et  $p_i(t)$ .

**Exemple 6.25.** Oscillateur harmonique

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (6.159)$$

On cherche une fonction  $f(q, t)$  satisfaisant

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (6.160)$$

Cherchons une solution sous la forme

$$f(q, t) = f_1(t) + f_2(q).$$

Alors

$$\frac{df_1}{dt} + \frac{1}{2m} \left( \frac{df_2}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = 0. \quad (6.161)$$

Le premier terme ne dépend que de  $t$ , le second et le troisième ne dépendent que de  $q$ . Chacun doit donc être constant. On pose donc :

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = -\alpha, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{df_2}{dq} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = \alpha. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} f_1(t) = -\alpha t + \beta, \\ \frac{df_2}{dq} = \pm \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}. \end{cases} \quad (6.162)$$

La solution générale de l'équation de Hamilton–Jacobi est donnée par

$$S(q, \alpha, t) = \int_0^q dq' \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q'^2} - \alpha t. \quad (6.163)$$

*N.B.* : La constante additive  $\beta$  n'intervient pas dans  $S$ .

Considérons maintenant la fonction génératrice

$$F_2(q, P, t) = \int_0^q dq' \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2} - Pt. \quad (6.164)$$

On obtient alors :

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2}, \quad (6.165)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -t + \int_0^q dq' \frac{m}{\sqrt{2mP - m^2\omega^2 q'^2}}. \quad (6.166)$$

Comme la primitive de  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  est  $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ , on obtient

$$Q = -t + \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{P}} \int_0^q dx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2P} x^2}} \quad (6.167)$$

$$= -t + \sqrt{\frac{m}{2P}} \frac{1}{m\omega} \arcsin\left(q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}}\right) \quad (6.168)$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin\left(q \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}}\right). \quad (6.169)$$

On en déduit :

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + Q)). \quad (6.170)$$

Autrement dit,

$$q = a \sin(\omega t + \theta), \quad (6.171)$$

où  $a = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}}$ .

**Remarque 6.8.**  $P$  est l'énergie du système.

**Remarque 6.9.** On pourrait croire que  $p$  est toujours positif. En réalité, après  $q_{\max}$  il faut changer de branche :

$$\frac{dS}{dq} = -\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}.$$

Plus sûr encore :  $p = m\dot{q}$  !

### 6.7.1 Interprétation de $S$

La solution  $S$  s'appelle *fonction action*. Calculons sa dérivée totale par rapport au temps :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i. \quad (6.172)$$

Mais  $\dot{P}_i = 0$  car  $P_i$  est constante. Ainsi,

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum_i p_i \dot{q}_i = L \quad (6.173)$$

$$\Rightarrow S(t) - S(t_0) = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t') dt'. \quad (6.174)$$

À une constante près,  $S$  correspond donc à l'action calculée le long des trajectoires physiques, c'est-à-dire les trajectoires effectivement suivies par le système. En fait, on peut même montrer que

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = \int_{t_0}^t L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t') dt', \quad (6.175)$$

calculée le long de la trajectoire qui arrive en  $q_1(t) = q_1, \dots, q_n(t) = q_n$ , les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  étant reliés à  $t_0$  et aux valeurs initiales  $q_1(t_0), \dots, q_n(t_0)$ .

**Exemple 6.26.** Retrouvons la forme de  $S$  pour l'oscillateur harmonique à partir de la solution connue :

$$q(t) = a \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{q}(t) = -a\omega \sin(\omega t + \alpha),$$

avec les conditions

$$\begin{cases} q(t_1) = q_1 = a \cos(\omega t_1 + \alpha), \\ q(t_2) = q_2 = a \cos(\omega t_2 + \alpha), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a, \alpha \text{ en fonction de } q_1, q_2.$$

Le lagrangien est

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (6.176)$$

L'action vaut

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (6.177)$$

En insérant  $q(t)$  et  $\dot{q}(t)$  :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \right] dt \quad (6.178)$$

$$= -\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos(2(\omega t + \alpha)) dt \quad (6.179)$$

$$= -\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \left[ \frac{\sin(2(\omega t + \alpha))}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} \quad (6.180)$$

$$S = -\frac{1}{4} m a^2 \omega [\sin(2(\omega t_2 + \alpha)) - \sin(2(\omega t_1 + \alpha))]. \quad (6.181)$$

On utilise l'identité trigonométrique

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2\sqrt{1 - \cos^2 x} \cos x.$$

Ainsi,

$$a^2 \sin 2(\omega t_2 + \alpha) = 2a \cos(\omega t_2 + \alpha) \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2(\omega t_2 + \alpha)} \quad (6.182)$$

$$= 2q_2 \sqrt{a^2 - q_2^2}. \quad (6.183)$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2} m \omega \left[ q_2 \sqrt{a^2 - q_2^2} - q_1 \sqrt{a^2 - q_1^2} \right].$$

**Attention !** Il faut maintenant exprimer  $a$  en fonction de  $q_1, q_2$  :

$$\begin{cases} q_1 = a \cos(\omega t_1 + \alpha), \\ q_2 = a \cos(\omega t_2 + \alpha), \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \arccos\left(\frac{q_1}{a}\right) = \omega t_1 + \alpha, \\ \arccos\left(\frac{q_2}{a}\right) = \omega t_2 + \alpha, \end{cases}$$

d'où

$$\arccos\left(\frac{q_2}{a}\right) - \arccos\left(\frac{q_1}{a}\right) = \omega(t_2 - t_1).$$

Pour simplifier, prenons  $q_1 = 0$  et  $t_1 = 0$ , d'où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Alors :

$$q_2 = -a \sin(\omega t_2) \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{q_2}{\sin(\omega t_2)}.$$

Comme  $q_2 < 0$  :

$$\sqrt{a^2 - q_2^2} = -q_2 \sqrt{\frac{a^2}{q_2^2} - 1} = -q_2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\omega t_2)} - 1}.$$

On obtient alors :

$$S = \frac{1}{2} m \omega q_2^2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\omega t_2)} - 1} = -\frac{1}{2} m \omega q_2^2 \cot(\omega t_2).$$

Enfin, les dérivées utiles sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q_2} = m \omega q_2 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\omega t_2)} - 1} = m \omega \sqrt{a^2 - q_2^2}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} m \omega q_2^2 \left( -\frac{\omega}{\sin^2(\omega t_2)} \right) = -\frac{m \omega^2 a^2}{2}. \end{cases}$$

On voit bien que ces deux dérivées partielles définissent l'expression de  $S$  (6.163) que nous avons trouvées avant.

### 6.7.2 L'équation de Hamilton–Jacobi : $H$ indépendant de $t$

Lorsque l'hamiltonien ne dépend pas du temps, on peut chercher la solution sous la forme

$$S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \alpha_1 t. \quad (6.184)$$

En reportant cette expression dans l'équation de Hamilton–Jacobi, on obtient

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1. \quad (6.185)$$

Cette équation est appelée *équation caractéristique de Hamilton–Jacobi*. On peut bien sûr l'utiliser directement pour déterminer  $S$ , mais on peut également s'en servir pour construire une transformation canonique via la fonction génératrice :

$$F_2(q_1, \dots, q_n; P_1, \dots, P_n; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1 = P_1, \dots, \alpha_n = P_n). \quad (6.186)$$

Comme  $W$  ne dépend pas de  $t$ , on obtient

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \\ Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \end{cases} \quad K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) = P_1. \quad (6.187)$$

On voit que toutes les variables  $Q_i$  sont cycliques, d'où

$$\dot{P}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.188)$$

et que toutes les variables  $P_2, \dots, P_n$  sont cycliques, d'où

$$\dot{Q}_i = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (6.189)$$

Quant à  $Q_1$ , on a  $Q_1 = t + Q_1^0$ , puisque

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = 1.$$

Il est parfois plus avantageux de considérer la transformation plus générale

$$F_2(q_1, \dots, q_n; P_1, \dots, P_n; t) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1 = \beta_1(P_1, \dots, P_n), \dots, \alpha_n) \quad (6.190)$$

$$= \beta_n(P_1, \dots, P_n), \quad (6.191)$$

où les fonctions  $\beta_i(P_1, \dots, P_n)$  définissent un changement de variables. Les nouvelles coordonnées sont alors données par

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_n; \beta_1(P_1, \dots, P_n), \dots, \beta_n(P_1, \dots, P_n)), \\ Q_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial \beta_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial P_i}, \\ K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) = \beta_1(P_1, \dots, P_n). \end{cases} \quad (6.192)$$

Dans cette formulation, les coordonnées  $Q_i$  restent cycliques, donc

$$\dot{P}_i = 0.$$

En revanche,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \beta_1}{\partial P_i},$$

d'où

$$Q_i(t) = \frac{\partial \beta_1}{\partial P_i} t + Q_i^0. \quad (6.193)$$

On obtient ainsi une représentation du système où la moitié des variables sont des constantes, tandis que l'autre moitié croît linéairement avec le temps.

**NB :** Comme la constante  $\alpha_1$  est égale à l'énergie, on la note souvent  $E$ .

### 6.7.3 L'équation de Hamilton–Jacobi : séparation des variables

**Définition :** une variable  $q_1$  est dite *séparable* si l'on peut chercher la solution de l'équation de Hamilton–Jacobi sous la forme

$$f(q_1, \dots, q_n; t) = f_1(q_1) + f'(q_2, \dots, q_n; t). \quad (6.194)$$

Ce sera en particulier le cas si  $q_1$  et  $\frac{\partial f}{\partial q_1}$  n'apparaissent dans l'équation de Hamilton–Jacobi que par l'intermédiaire d'une expression  $\phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right)$  qui ne dépend pas des autres variables ou des autres dérivées partielles. L'équation de Hamilton–Jacobi s'écrit alors :

$$H_1\left(\phi_1\left(q_1, \frac{\partial f}{\partial q_1}\right), q_2, \dots, q_n; \frac{\partial f}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ce qui équivaut, en utilisant  $f_1$  et  $f'$  :

$$\begin{cases} H_1\left(\alpha_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial f'}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial f'}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial f'}{\partial t} = 0, \\ \phi_1\left(q_1, \frac{df_1}{dq_1}\right) = \alpha_1. \end{cases}$$

**Exemple 6.27.** Si  $q_1$  est cyclique, on peut choisir  $\phi_1\left(q_1, \frac{df_1}{dq_1}\right) = \frac{df_1}{dq_1}$ . On en déduit  $f_1 = \alpha_1 q_1$  et  $p_1 = \alpha_1 = \text{constante}$ .

Un système est dit *complètement séparable* si, de proche en proche, on peut séparer toutes les variables. On a alors :

$$f(q_1, \dots, q_n; t) = \sum_{k=1}^n f_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n) + f_0(t), \quad (6.195)$$

avec

$$\phi_k\left(q_k, \frac{df_k}{dq_k}\right) = \alpha_k,$$

et

$$H_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + \frac{df_0}{dt} = 0.$$

La solution de cette dernière équation contient seulement une constante additive, que l'on peut négliger. Dans le cas où  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, on trouve :

$$f_0(t) = -H_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) t \equiv -E(\alpha_1, \dots, \alpha_n) t. \quad (6.196)$$

La fonction  $S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$  qui permet d'effectuer la transformation canonique est de la forme

$$S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) = \sum_{k=1}^n S_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n, t) + S_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t). \quad (6.197)$$

En effet, si l'on a d'abord séparé la variable  $q_1$ , alors  $S_1$  ne dépend que de  $\alpha_1$  et non de  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ . De même, après séparation de  $q_2$ , la fonction  $S_2$  ne dépend pas de  $\alpha_3, \dots, \alpha_n$  mais dépend de  $\alpha_1$ . Ainsi, il serait incorrect d'affirmer que  $S_k$  dépend uniquement de  $\alpha_k$  : l'expression ci-dessus est la plus générale possible.

**Exemple 6.28.** Coordonnées sphériques.

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \phi). \quad (6.198)$$

Supposons que le potentiel soit de la forme

$$U(r, \theta, \phi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \quad (6.199)$$

L'équation de Hamilton–Jacobi devient :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (6.200)$$

Comme  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, on cherche une solution de la forme

$$f(r, \theta, \phi, t) = f'(r, \theta, \phi) - Et.$$

La variable  $\phi$  est cyclique :

$$f'(r, \theta, \phi) = f''(r, \theta) + p_\phi \phi, \quad (p_\phi = \text{constante}).$$

Ainsi,  $f''(r, \theta)$  satisfait :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial f''}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial f''}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) \right] + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} = E. \quad (6.201)$$

On multiplie par  $r^2$  :

$$-\frac{r^2}{2m} \left( \frac{\partial f''}{\partial r} \right)^2 - r^2 a(r) + Er^2 = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial f''}{\partial \theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (6.202)$$

On peut alors séparer  $r$  et  $\theta$  :

$$f''(r, \theta) = f_1(r) + f_2(\theta),$$

ce qui mène à

$$\begin{cases} \left( \frac{df_2}{d\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \beta, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{df_1}{dr} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E. \end{cases}$$

Ces deux équations définissent complètement la séparation des variables en coordonnées sphériques. Les constantes d'intégration sont  $p_\phi$ ,  $\beta$  et  $E$ . La solution s'écrit donc

$$S(r, \theta, \phi; p_\phi, \beta, E; t) = -Et + p_\phi \phi + \int d\theta \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} + \int dr \sqrt{2m(E - a(r)) - \frac{\beta}{r^2}} \quad (6.203)$$

#### 6.7.4 Lien entre la théorie de Hamilton–Jacobi et la mécanique quantique

La mécanique classique est à la mécanique quantique ce que l'optique des rayons (ou optique géométrique) est à l'optique ondulatoire. En optique géométrique classique, la longueur d'onde de la lumière est sans importance. Il suffit de tracer les rayons lumineux et de les faire se propager dans le milieu en fonction de l'indice de réfraction, en utilisant le principe de Fermat du moindre temps. Dans les cas simples, cela revient à utiliser la loi de Snell aux interfaces entre milieux différents.

La motivation historique de l'équation de Hamilton–Jacobi était justement d'exploiter cette analogie entre optique et mécanique. Les moments  $p_1, \dots$  sont proportionnels au gradient de  $S$  dans l'espace de configuration à  $N$  dimensions. Par conséquent, les surfaces sur lesquelles  $S$  est constant sont normales aux trajectoires possibles  $q_1(t), \dots$  dans l'espace de configuration. Les surfaces de phase constante avancent parce que les surfaces où  $S$  est constant se déplacent dans l'espace de configuration à cause du terme  $Et$  présent dans  $S$ . En optique classique, ces surfaces sont des surfaces de phase constante (c'est-à-dire des fronts d'onde) et les trajectoires sont les rayons lumineux, toujours perpendiculaires aux fronts d'onde. La propagation de la lumière dans un milieu à indice de réfraction variable est décrite par une équation exactement du même type que (6.153).

Cependant, l'invention de la théorie quantique a montré que la correspondance entre mécanique et optique allait au-delà d'une simple analogie. En mécanique quantique,  $S$  est proportionnelle à la phase de la fonction d'onde, de sorte qu'il existe un lien mathématique précis entre l'équation de Schrödinger et la mécanique. Cette connexion entre mécanique quantique et mécanique classique doit exister, puisque, dans la limite où la constante de Planck  $\hbar \rightarrow 0$ , la mécanique quantique doit se réduire à la mécanique classique.

On part de l'équation de Schrödinger en dimension 1 :

$$H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (6.204)$$

où  $\Psi$  est une fonction complexe

$$\Psi = \sqrt{\rho(x,t)} e^{iS(x,t)/\hbar}, \quad (6.205)$$

et  $\rho$  et  $S$  sont des fonctions réelles de  $x$  et  $t$ ,  $\rho$  étant la densité de probabilité. En remplaçant (6.205) dans (6.204), on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial x^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{\hbar^2} \sqrt{\rho} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right\} e^{iS/\hbar} \\ + V(x) \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar} = i\hbar \left\{ \frac{\partial \sqrt{\rho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho} \frac{\partial S}{\partial t} \right\} e^{iS/\hbar}. \end{aligned} \quad (6.206)$$

On suppose que  $\hbar \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right|^2$  (ici  $\hbar$  est supposée petite ; nous commenterons plus loin la signification physique de cette hypothèse). En ne gardant ensuite que les termes indépendants de  $\hbar$  afin d'obtenir la limite de l'équation de Schrödinger lorsque  $\hbar \rightarrow 0$ , on trouve

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.207)$$

La mécanique quantique, dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , donne l'équation de Hamilton–Jacobi (6.153) pour une particule unidimensionnelle soumise à une force conservative. De plus, dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , on peut associer la phase de la fonction d'onde à l'action classique divisée par  $\hbar$ . Cela constitue la base de la méthode WKB en mécanique quantique.

On peut montrer que la limite

$$\hbar \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial S}{\partial x} \right|^2$$

correspond essentiellement au fait que le potentiel reste pratiquement constant sur de nombreuses longueurs d'onde de de Broglie. Cela définit la limite des petites longueurs d'onde ou limite WKB semi-classique.

# Chapter 7

## L'espace des phases

### 7.1 Définition

L'état d'un système mécanique est connu lorsqu'on se donne la position et la vitesse de chaque particule. De façon équivalente, il est déterminé par la donnée des coordonnées  $q_i$  et des impulsions  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . L'espace à  $2N$  dimensions des coordonnées et des impulsions s'appelle *l'espace des phases*. La description d'un système dans cet espace est fondamentale pour plusieurs applications :

- En physique statistique, la base microscopique de la thermodynamique, la description se fait impérativement dans l'espace des phases, la probabilité à l'équilibre pour que le système soit dans l'état  $\{q_i, p_i\}$  étant proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{H(p_i, q_i)}{k_B T}\right) \quad (k_B : \text{constante de Boltzmann, } T : \text{température}).$$

- Les systèmes intégrables, i.e. les systèmes pour lesquels on peut résoudre les équations du mouvement par quadrature, ne peuvent se décrire que dans cet espace.

### 7.2 Systèmes à 1 degré de liberté : portrait de phase

L'exemple le plus simple est celui des systèmes à un degré de liberté. Dans ce cas, l'espace des phases est un espace à deux dimensions, c'est-à-dire un plan, et les trajectoires sont des courbes dans ce plan. Dans le cas des systèmes autonomes, c'est-à-dire des systèmes décrits par un hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, l'équation des trajectoires est donnée par

$$H(p, q) = E. \quad (7.1)$$

Une collection d'orbites représentatives d'un système s'appelle un *portrait de phase*.

**Exemple :** Considérons le pendule simple constitué d'un point matériel fixé à une corde et pouvant tourner autour d'un axe horizontal. C'est un système à un degré de liberté. L'énergie s'écrit :  $T + V$ .

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2, \\ V = -mgr \cos \theta. \end{cases}$$

Le moment conjugué de  $\theta$  vaut

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \quad (7.2)$$

et l'hamiltonien est

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - mgr \cos \theta. \quad (7.3)$$

L'équation  $H(\theta, p_\theta) = E$  conduit à

$$p_\theta = \pm \sqrt{2mr^2(E + mgr \cos \theta)}. \quad (7.4)$$

Deux cas de figure sont à distinguer :

- $-mgr \leq E < mgr$ : Pour que la racine carrée soit définie, il faut que

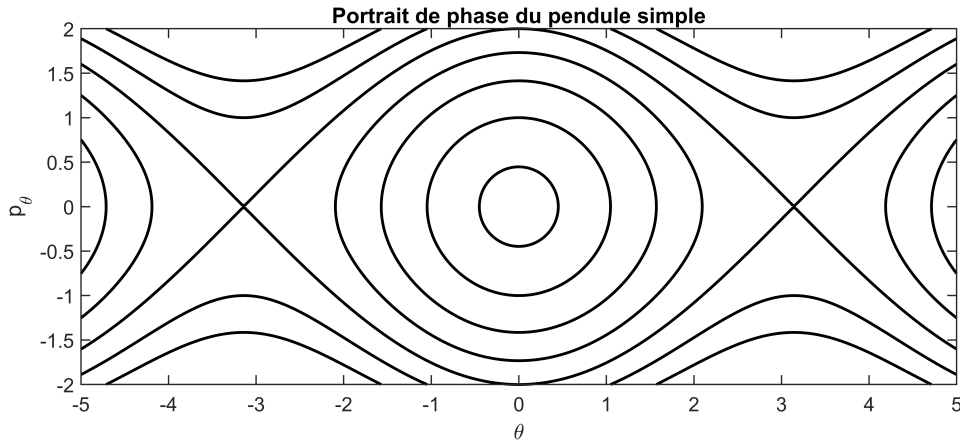
$$E + mgr \cos \theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta > -\frac{E}{mgr}.$$

On en déduit

$$-\theta' < \theta < \theta', \quad \text{où } \cos \theta' = -\frac{E}{mgr}.$$

Les orbites sont alors des courbes fermées. Le pendule oscille autour de sa position d'équilibre. Lorsque  $E$  se rapproche de sa valeur minimale  $-mgr$ ,  $\theta'$  tend vers 0. L'amplitude des oscillations devient très faible. Au contraire, lorsque  $E$  se rapproche de  $mgr$ ,  $\theta'$  tend vers  $\pi$ , et l'amplitude des oscillations devient proche de  $2\pi$ .

- $E > mgr$ :  $p_\theta$  ne s'annule jamais et garde toujours le même signe. Le pendule tourne indéfiniment. Il est alors plus naturel de considérer  $\theta$  comme une variable allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .



### 7.3 Systèmes à un degré de liberté : variables action-angle

Dans l'exemple précédent, les deux types de mouvement sont périodiques. De façon générale, les équations du mouvement d'un système qui subit un mouvement périodique peuvent être mises sous une forme universelle à l'aide d'une transformation canonique vers des variables  $(Q, P)$  telles que  $P$  reste constant au cours du mouvement alors que  $Q$  augmente de  $2\pi$  pendant une période  $T$ .

Supposons qu'on ait résolu l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi à l'aide d'une fonction  $W(q, \alpha)$ . Le problème est donc de déterminer la fonction  $\beta(P)$  telle que la fonction génératrice

$$F_2(q; P) \equiv W(q; \alpha = \beta(P)) \quad (7.5)$$

conduise à une transformation canonique telle que  $P$  soit constant et telle que  $Q$  augmente de  $2\pi$  au cours d'une période. Puisque le mouvement est périodique,  $q(t+T) = q(t)$ , et le plus simple est d'exprimer  $Q$  comme fonction de  $q$ , et d'écrire la condition sur  $Q$  comme

$$\Delta Q \equiv \oint \frac{dQ}{dq} dq = 2\pi, \quad (7.6)$$

où  $\oint dq$  signifie que l'on suit le mouvement sur un cycle. Mais comme  $Q$  est définie par la transformation canonique engendrée par  $F_2(q; P)$ , on a :

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dq} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F_2}{\partial P} \right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P^2} \frac{\partial P}{\partial q}.$$

Mais  $\frac{\partial P}{\partial q} = 0$  puisque  $P$  est une constante.

$$\Rightarrow \quad \frac{dQ}{dq} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P}.$$

La condition s'écrit donc

$$2\pi = \oint \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial P} dq = \frac{\partial}{\partial P} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial P} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq. \quad (7.7)$$

Cette condition sera donc satisfaite si  $P$  et  $\alpha$  sont reliés par

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq. \quad (7.8)$$

La fonction  $\beta(P)$  qui résout le problème initialement posé est donc définie par sa fonction réciproque  $\beta^{-1}(\alpha)$  donnée par

$$\beta^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq. \quad (7.9)$$

**Définition :** pour un système à un degré de liberté effectuant un mouvement périodique, on appelle *variables action-angle*, et on note  $(I, w)$  le couple de variables canoniquement conjuguées ( $I$  : impulsion,  $w$  : coordonnée) telles que  $I$  soit une constante et que  $w$  augmente de  $2\pi$  au cours d'une période. Pour trouver la fonction génératrice  $F_2(q; I)$  de cette transformation canonique, on procède en plusieurs étapes :

1. On résout l'équation caractéristique de Hamilton–Jacobi

$$\Rightarrow W(q; \alpha).$$

2. On détermine la fonction  $\beta$  dont la réciproque est définie par

$$I = \beta^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q; \alpha) dq.$$

3. On en déduit la fonction génératrice  $F_2(q; I)$  par :

$$F_2(q; I) \equiv W(q; \alpha = \beta(I)). \quad (7.10)$$

4. La variable  $w$  est alors définie par

$$w = \frac{\partial F_2}{\partial I}. \quad (7.11)$$

5. Le nouvel hamiltonien est donné par

$$K(w; I) = \alpha = \beta(I). \quad (7.12)$$

6. La fréquence du mouvement se déduit de l'équation du mouvement pour  $w$  :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial K}{\partial I} = \frac{d\beta}{dI} \quad (7.13)$$

d'où

$$w(t) = w(0) + \frac{d\beta}{dI} t,$$

et donc

$$w(T) - w(0) = \frac{d\beta}{dI} T,$$

où  $T$  est la période du mouvement. Mais par construction  $w(T) - w(0) = 2\pi$ , donc

$$2\pi = \frac{d\beta}{dI} T, \quad (7.14)$$

et ainsi

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = \frac{d\beta}{dI}. \quad (7.15)$$

Autrement dit, la fonction  $\beta(I)$  donne directement accès à la fréquence des oscillations.

### Remarques :

- La terminologie « angle » pour la variable  $w$  est évidente.
- Pour la variable  $I$ , l'appellation « variable action » vient du fait qu'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (7.16)$$

puisque  $\partial F_2 / \partial q = p$ .

Or, pour un système autonome, l'action  $S$  s'écrit :

$$S = \int (p\dot{q} - H) dt = \int p dq - Et. \quad (7.17)$$

La quantité  $\oint p dq$  est appelée « action raccourcie », et la quantité

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq,$$

qui est l'intégrale de l'action raccourcie sur une période, a la dimension d'une action.

- Pour calculer la fréquence, on n'a pas besoin de résoudre l'équation de Hamilton–Jacobi. En effet, pour déterminer  $\beta(I)$ , il suffit de connaître  $\frac{\partial W}{\partial q}$  en fonction de  $q$  et de  $\alpha$ , autrement dit de résoudre l'équation

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha \quad (7.18)$$

pour la variable  $\frac{\partial W}{\partial q}$ . La méthode des variables action–angle est donc une méthode très efficace pour calculer la fréquence des oscillations d'un mouvement dont on sait *a priori* qu'il est périodique sans avoir besoin d'obtenir la solution complète du problème.

**Exemple 7.1.** Oscillateur harmonique

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

Pour ce système,

$$W(q; \alpha) = \pm \int_0^q dq' \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q'^2}.$$

Au cours du mouvement,  $q$  oscille entre les valeurs maximales définies par

$$H(p=0, q) = \alpha \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \leq q \leq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}.$$

On a donc

$$I = \beta^{-1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}}^{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}} \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2} dq \right). \quad (7.19)$$

Posons  $q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \theta$ . Alors

$$dq = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2q^2} = \sqrt{2m\alpha} \cos \theta.$$

Ainsi,

$$I = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2m\alpha} \cos \theta \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta \right) \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\alpha}{\omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\alpha}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.21)$$

$$= \frac{\alpha}{\omega}. \quad (7.22)$$

On en déduit

$$\beta^{-1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \beta(I) = \omega I.$$

La fonction génératrice s'écrit donc

$$F_2(q; I) = W(q; \beta(I)) = \pm \int_0^q dq' \sqrt{2mI\omega - m^2\omega^2 q'^2}. \quad (7.23)$$

Enfin, la fréquence des oscillations vaut

$$\omega = \frac{d\beta}{dI},$$

comme attendu.

## 7.4 Systèmes séparables : variables action-angle

Considérons un système à  $n$  degrés de liberté complètement séparable, et supposons que le mouvement par rapport à chaque paire  $(q_k, p_k)$  soit périodique. Supposons par ailleurs que le système soit autonome. L'équation caractéristique de Hamilton–Jacobi possède donc une solution qui s'écrit

$$W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_k W_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (7.24)$$

Par analogie avec le cas d'un degré de liberté, on peut chercher une transformation canonique vers des variables telles que la moitié d'entre elles soient des constantes et l'autre moitié augmente de  $2\pi$ . Cette transformation sera *a priori* engendrée par une fonction génératrice de la forme

$$F_2(q_1, \dots, q_n; I_1, \dots, I_n) = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1 = \beta_1(I_1, \dots, I_n), \dots, \alpha_n = \beta_n(I_1, \dots, I_n)). \quad (7.25)$$

Le raisonnement fait dans le cas d'une variable se généralise sans problème. Les variables  $I_k$  sont définies par

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_k}{\partial q_k}(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_k, \quad (7.26)$$

où l'intégration se fait suivant une orbite de la paire  $(q_k, p_k)$ . Ces équations constituent un système de  $n$  équations reliant les  $I_k$  aux  $\alpha_k$ . Ce système permet donc d'exprimer les  $\alpha_k$  en fonction des  $I_k$  :  $\alpha_k = \beta_k(I_1, \dots, I_n)$ . La transformation canonique engendrée par la fonction génératrice  $F_2(q_1, \dots, q_n; I_1, \dots, I_n)$  définie à partir de  $W$  à l'aide des fonctions  $\beta_1(I_1, \dots, I_n), \dots, \beta_n(I_1, \dots, I_n)$  conduit, d'après la théorie générale, aux équations du mouvement suivantes pour les variables  $w_k$  :

$$\dot{w}_k = \frac{\partial \beta_1(I_1, \dots, I_n)}{\partial I_k}. \quad (7.27)$$

La quantité  $\omega_k = \frac{\partial \beta_1}{\partial I_k}$  est la fréquence du mouvement pour les variables  $(q_k, p_k)$ .

**NB :** Comme la constante  $\alpha_1$  est égale à l'énergie, on la note souvent  $E$ . Le problème revient donc à exprimer l'énergie en fonction des variables actions  $I_k$ . On en déduit les fréquences par

$$\omega_k = \frac{\partial E}{\partial I_k}.$$

### Intérêt des variables action-angle

1. Comme dans le cas à un degré de liberté, les fréquences peuvent être calculées sans résoudre l'équation différentielle de Hamilton–Jacobi, autrement dit sans obtenir explicitement la solution complète des équations du mouvement. En effet, au cours de la séparation des variables, on est conduit à des équations pour chacune des dérivées partielles  $\frac{\partial W}{\partial q_k}$ . Pour calculer les variables action  $I_k$ , il suffit d'extraire de ces équations les quantités  $\frac{\partial W}{\partial q_k}$  en fonction de  $q_k$  et des  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Il n'est pas nécessaire d'intégrer ces équations différentielles.
2. **Nature du mouvement** : le mouvement dépend des relations entre les  $n$  fréquences  $\omega_k$ . Si elles sont incommensurables, le mouvement global n'est pas périodique. Si elles sont toutes commensurables, le mouvement est périodique.
3. **Intégrales premières** : si deux fréquences sont commensurables, on parle de dégénérescence. On peut montrer que dans ce cas de nouvelles intégrales premières qui sont des fonctions univoques des coordonnées apparaissent (voir problème de Kepler et vecteur de Lenz).
4. **Séparation des variables dans plusieurs systèmes de coordonnées** : on peut aussi démontrer que s'il y a dégénérescence il y a séparation des variables pour plusieurs systèmes de coordonnées (voir problème de Kepler et coordonnées paraboliques).
5. **Mécanique quantique** : si un système est séparable et périodique, les états possibles du système d'après la mécanique quantique sont déterminés par :

$$I_k = n_k \hbar, \quad n_k \text{ entier}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = \text{constante de Planck.} \quad (7.28)$$

Cette méthode a fourni la première théorie quantique (voir problème de Kepler). Ces règles de quantification sont connues sous le nom de règles de Bohr–Sommerfeld. Malheureusement, la méthode ne peut pas être étendue aux systèmes non intégrables, et elle a été abandonnée au profit de méthodes plus efficaces (voir cours de Mécanique Quantique).

## 7.5 Systèmes intégrables

Pour un système séparable, et tel que le mouvement par rapport à chaque paire  $(q_k, p_k)$  soit périodique, on a explicitement construit une transformation canonique pour laquelle la moitié des variables, à savoir les variables action  $I_k$ , sont des constantes du mouvement. Par ailleurs, puisque la transformation est canonique, on a :

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7.29)$$

**Définition** : Un système à  $n$  degrés de liberté est dit intégrable s'il existe  $n$  intégrales premières indépendantes satisfaisant

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7.30)$$

On dit que ces intégrales premières sont en *involution*.

**Remarques** :

1. Tout système complètement séparable est intégrable, mais la réciproque n'est pas vraie. L'exemple le plus célèbre est le réseau de Toda défini par l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n p_i^2 + V_0 \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{q_i - q_{i+1}}{a}\right), \quad q_{n+1} \equiv q_1, \quad (7.31)$$

pour lequel on peut construire  $n$  intégrales premières en involution, mais qui n'admet pas de séparation des variables.

2. On peut construire des variables action-angle sans invoquer la séparation des variables. L'idée de base est la suivante : l'existence de  $n$  intégrales premières impose au mouvement de rester sur un tore de dimension  $n$ . L'intégrale le long d'un chemin fermé sur le tore est un invariant topologique et une constante du mouvement.
3. On pense que, dans le cas générique, un système mécanique n'est pas intégrable (on n'a pas de preuve ! On ne connaît que quelques exemples où l'on a pu prouver que le système n'était pas intégrable). L'absence d'intégrabilité peut avoir des conséquences très importantes sur l'évolution des systèmes aux temps longs, avec l'apparition de chaos (voir chapitre suivant).

## 7.6 Théorème de Liouville

Le lien entre la thermodynamique et la mécanique est basé sur la description statistique des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Dans le cadre de cette description, la quantité de base est la probabilité de trouver un système mécanique donné dans un état donné. Comme l'état d'un système est défini par les positions et les vitesses des particules, il pourrait sembler logique d'utiliser les  $q_i, \dot{q}_i$  pour définir cette probabilité. En réalité, il est nettement préférable d'utiliser les coordonnées et les impulsions, c'est-à-dire l'espace des phases. La raison fondamentale de ce choix réside dans le fait que le volume de l'espace des phases est conservé lorsqu'on effectue une transformation canonique, et donc en particulier au cours de l'évolution du système. Considérons en effet un volume  $V$  défini par

$$V = \int_{\Omega} \prod_i dp_i dq_i, \quad \Omega = \text{domaine dans l'espace des phases.} \quad (7.32)$$

Si on fait une transformation canonique vers les variables  $Q_i, P_i$ , le domaine  $\Omega$  devient  $\Omega'$ , et le volume correspondant devient

$$V' = \int_{\Omega'} \prod_i dQ_i dP_i.$$

**Proposition 4.1.**  $V = V'$ .

En effet, effectuons le changement de variable dans l'intégrale donnant  $V$ . On trouve

$$V = \int_{\Omega'} D \prod_i dP_i dQ_i \quad (7.33)$$

où  $D$  est le jacobien, c'est-à-dire le déterminant de la matrice des dérivées des anciennes variables par rapport aux nouvelles. En utilisant les notations compactes, on a

$$\begin{cases} V = \int_{\Omega} d\vec{x}, & V' = \int_{\Omega'} d\vec{y}, \\ D = \det(M^{-1}). \end{cases} \quad (7.34)$$

Mais comme  $M$  est symplectique,

$$\det M = \det(M^{-1}) = 1 \implies D = 1,$$

d'où

$$V = \int_{\Omega'} D d\vec{y} = \int_{\Omega'} d\vec{y} = V'.$$

C.Q.F.D.

Une extension importante de cette proposition est que le volume dans l'espace des phases est conservé au cours du temps. Pour démontrer cela, il suffit de montrer que si le système est décrit par  $\vec{x}$  à l'instant 0 et par  $\vec{y}_t(\vec{x})$  à l'instant  $t$ , la matrice  $M$  définie par

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

est symplectique. Pour simplifier les notations, on définit l'opérateur différentiel  $D : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  :

$$D\vec{y} = \left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right) = M. \quad (7.35)$$

L'équation du mouvement en notations compactes s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{y}_t(\vec{x}) = J \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y}_t(\vec{x}). \quad (7.36)$$

Si on applique l'opérateur différentiel de part et d'autre, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (D\vec{y}) = J \left[ D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right] (D\vec{y}), \quad (7.37)$$

ou encore

$$-J \frac{\partial}{\partial t} (D\vec{y}) = \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right) (D\vec{y}). \quad (7.38)$$

Prenant la transposée, il vient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( (D\vec{y})^t J \right) = (D\vec{y})^t \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right), \quad (7.39)$$

soit, puisque  $J^t = -J$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( (D\vec{y})^t J \right) = (D\vec{y})^t \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right). \quad (7.40)$$

En multipliant (7.38) par  $-(D\vec{y})^t$  à gauche et (7.40) par  $(D\vec{y})$  à droite, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (D\vec{y})^t J (D\vec{y}) \right] = (D\vec{y})^t \left[ \left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right) - D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \circ \vec{y} \right] (D\vec{y}). \quad (7.41)$$

Mais

$$\left( D \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) \right)_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$$

est symétrique, d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (D\vec{y})^t J (D\vec{y}) \right] = 0 \implies (D\vec{y})^t J (D\vec{y}) = \text{cte} = J, \quad (7.42)$$

puisque  $D\vec{y}|_{t=0} = \mathbf{1}$ .

Cette propriété est connue sous le nom de *Théorème de Liouville* : le volume de l'espace des phases est conservé au cours du temps. Cette propriété est fondamentale pour la définition de l'équilibre thermodynamique. Une démonstration plus générale de ce résultat sera donnée dans le chapitre suivant.



## Chapter 8

# Introduction aux systèmes dynamiques

### 8.1 Définitions

Un *système dynamique* est un système dont l'état est décrit par un vecteur  $\vec{x}$  à  $n$  composantes et dont l'évolution est régie par une équation différentielle du premier ordre du type

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}). \quad (8.1)$$

*Exemple :* Un système hamiltonien est un système dynamique. En effet, en notation compacte,

$$\dot{\vec{x}} = J \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \right) = \vec{F}(\vec{x}), \quad (8.2)$$

avec

$$F_i(\vec{x}) = \sum_j J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par contre, tous les systèmes dynamiques ne sont pas des systèmes hamiltoniens. Par exemple, la description d'un système macroscopique peut se faire à l'aide de quelques degrés de liberté pour lesquels les équations du mouvement ont un terme dissipatif. De tels systèmes ne peuvent pas être décrits par un hamiltonien. Par ailleurs, dans beaucoup d'autres contextes, des équations de ce type apparaissent. L'objet de ce chapitre est de discuter un certain nombre d'aspects des propriétés de ces systèmes.

Pour un tel système, il passe en général une et une seule solution par un point donné  $\vec{x}_0$ . On appelle *flot* et on note  $\phi_t(\vec{x}_0)$  la solution  $\vec{x}(t)$  telle que  $\vec{x}(t=0) = \vec{x}_0$ .

### 8.2 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

Soit  $V \equiv V(0)$  le volume d'un domaine  $M$  dans l'espace à  $n$  dimensions,

$$V = \int_M dx_1 \dots dx_n. \quad (8.3)$$

et soit  $V(t)$  le volume de son image  $\phi_t(M)$ ,

$$V(t) = \int_{\phi_t(M)} dy_1 \dots dy_n = \int_M J(t, x) dx_1 \dots dx_n, \quad (8.4)$$

où  $J(t, x)$  est le jacobien de la transformation de  $\vec{x} \mapsto \vec{y} \equiv \phi_t(\vec{x})$ . Essayons de calculer

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(\Delta t) - V(0)}{\Delta t}.$$

Au premier ordre en  $\Delta t$ , on a :

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{F}(\vec{x})\Delta t + O(\Delta t^2), \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Delta t. \quad (8.6)$$

Posons  $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ . Le jacobien de cette transformation,  $\det(\mathbb{I} + A\Delta t)$ , est un polynôme de degré  $n$  en  $\Delta t$ . Pour calculer la dérivée  $\frac{dV}{dt}$ , il suffit d'en connaître le terme d'ordre 1, c'est-à-dire linéaire en  $\Delta t$ . Mais  $\mathbb{I} + A\Delta t$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 + A_{11}\Delta t & A_{12}\Delta t & A_{13}\Delta t & \cdots \\ A_{21}\Delta t & 1 + A_{22}\Delta t & A_{23}\Delta t & \cdots \\ A_{31}\Delta t & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Faisons un développement du déterminant selon la première colonne. Il vient

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I} + A\Delta t) &= (1 + A_{11}\Delta t) \begin{vmatrix} 1 + A_{22}\Delta t & A_{23}\Delta t & \cdots \\ A_{32}\Delta t & 1 + A_{33}\Delta t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \\ &\quad - A_{21}\Delta t \begin{vmatrix} A_{12}\Delta t & A_{13}\Delta t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \\ &\quad + A_{31}\Delta t \begin{vmatrix} A_{12}\Delta t & A_{13}\Delta t & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} - \cdots \end{aligned}$$

$A_{n1}\Delta t$  est facteur d'un déterminant dont la première ligne est  $(A_{12}\Delta t \ A_{13}\Delta t \ \dots)$ . Le terme correspondant est donc d'ordre supérieur ou égal à 2 et peut être omis. Ainsi,

$$\det(\mathbb{I} + A\Delta t) = (1 + A_{11}\Delta t)(1 + A_{22}\Delta t) \cdots (1 + A_{nn}\Delta t) + O(\Delta t^2) \quad (8.7)$$

$$= 1 + \left( \sum_i A_{ii} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (8.8)$$

$$= 1 + (\text{Tr } A)\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (8.9)$$

$$= 1 + (\text{div } \vec{F})\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (8.10)$$

On en déduit que

$$V(\Delta t) = V(0) + \int_M \text{div } \vec{F} \, d\vec{x} \, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dV}{dt} = \int_M \text{div } \vec{F} \, d\vec{x}} \quad (8.11)$$

Un système est dit *conservatif* en  $\vec{x}$  si  $\text{div } \vec{F} = 0$  et *dissipatif* si  $\text{div } \vec{F} < 0$ .

**Exemple 8.1.** Système hamiltonien. Un système Hamiltonien est régi par les équations de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

En utilisant les équations de Hamilton on obtient

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = 0.$$

Les systèmes hamiltoniens sont donc conservatifs. On retrouve le Théorème de Liouville.

**Exemple 8.2.** Force de frottement proportionnelle à la vitesse. Supposons qu'un système soit caractérisé par une force de frottement proportionnelle à la vitesse. Nous avons  $\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau}$ . L'intégrale dans le temps donne, à une constante près  $\dot{x} = -\frac{x}{\tau} = F(x)$ , d'où

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{1}{\tau} < 0.$$

Le système est donc dissipatif.

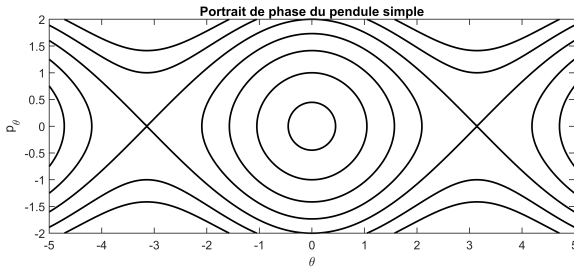
### 8.2.1 Points fixes et stabilité

Un *point fixe* (ou point d'équilibre ou point singulier) est un point  $\vec{x}_*$  qui satisfait

$$\vec{F}(\vec{x}_*) = \vec{0}.$$

Un tel point peut être commun à plusieurs trajectoires.

**Exemple 8.3.** Pendule simple



On considère le système

$$\begin{cases} \dot{p}_\theta = -mgr \sin \theta = 0 \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = 0 \end{cases}$$

On a deux points fixes :

$$\begin{aligned} \theta = 0 & \quad (E = -mgr), \\ \theta = \pi & \quad (E = mgr). \end{aligned}$$

Les points fixes ne sont pas tous équivalents du point de vue de la stabilité. De façon générale, on distingue trois types de points fixes :

- $\vec{x}_*$  est *asymptotiquement stable* s'il existe un voisinage de  $\vec{x}_*$  tel que, pour tout  $\vec{x}$  dans ce voisinage,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\vec{x}) = \vec{x}_*$ .
- $\vec{x}_*$  est *stable* s'il existe un voisinage de  $\vec{x}_*$  tel que, pour tout  $\vec{x}$  dans ce voisinage,  $\phi_t(\vec{x})$  reste dans un voisinage de  $\vec{x}_*$  pour tout  $t > 0$ .
- $\vec{x}_*$  est *instable* sinon.

Pour étudier la stabilité d'un point singulier, la première étape consiste à faire une linéarisation des équations au voisinage du point singulier. Plus précisément, on pose

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_*,$$

et on ne garde que les termes linéaires en  $\vec{y}$  :

$$\dot{\vec{y}} = \dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}_* + \vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}_*) + \frac{D\vec{F}}{D\vec{x}}(\vec{x}_*)\vec{y} + \dots \quad (8.12)$$

avec

$$A \equiv \frac{D\vec{F}}{D\vec{x}}(\vec{x}_*), \quad A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}_*).$$

On doit donc étudier l'équation

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y}.$$

La solution de cette équation est

$$\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}(0),$$

où l'exponentielle d'une matrice est définie par

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

En effet,

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(At)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = A \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p t^p}{p!} = A \exp(At)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\exp(At)\vec{y}(0)) = A \exp(At)\vec{y}(0) = A\vec{y}(t). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Supposons que la matrice  $A$  soit diagonalisable, et désignons par  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ses valeurs propres, *a priori* complexes, et par  $\vec{z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , les vecteurs propres associés. Dans  $\mathbb{C}^n$ , l'équation

$$\dot{\vec{z}} = A\vec{z} \quad (8.13)$$

peut être résolue simplement en décomposant  $\vec{z}$  dans la base des vecteurs propres de  $A$ . Posons en effet :

$$\vec{z}(t) = \sum_j c_j(t) \vec{z}_j. \quad (8.14)$$

L'équation  $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_j \dot{c}_j(t) \vec{z}_j &= \sum_j a_j c_j(t) \vec{z}_j \\ \Rightarrow \dot{c}_j(t) &= a_j c_j(t), \quad j = 1, \dots, n \\ \Rightarrow c_j(t) &= c_j(0) e^{a_j t}. \end{aligned}$$

La solution générale s'écrit donc

$$\vec{z} = \sum_j c_j e^{a_j t} \vec{z}_j. \quad (8.15)$$

Mais comme  $A$  est une matrice réelle, si  $\vec{z}$  est solution,  $\text{Re}(\vec{z})$  est aussi solution. En effet, la partie réelle de l'équation  $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\text{Re}(\vec{z})) = A \text{Re}(\vec{z}).$$

La solution générale dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit donc :

$$\vec{y} = \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n c_j e^{a_j t} \vec{z}_j \right), \quad c_j \in \mathbb{C}. \quad (8.16)$$

La stabilité dépend du signe des parties réelles des  $a_j$ . On peut démontrer les résultats suivants :

- Si  $\operatorname{Re} a_j < 0$ ,  $\forall j$ , alors  $\vec{x}_*$  est *asymptotiquement stable*.
- Si  $\operatorname{Re} a_j > 0$  pour au moins une valeur de  $j$ ,  $\vec{x}_*$  est *instable*.

Dans le cas où  $\operatorname{Re} a_j \leq 0$  pour tout  $j$ , et où  $\operatorname{Re} a_j = 0$  pour au moins une valeur de  $j$ , l'analyse du problème linéarisé ne permet pas de conclure, et la stabilité dépend des termes non linéaires. L'étude de la stabilité au-delà de la linéarisation est un sujet complexe qui sort du cadre de ce cours.

**Remarque 8.1.** Seuls les systèmes dissipatifs peuvent avoir des points singuliers asymptotiquement stables. En effet,  $\operatorname{Re} a_j < 0 \forall j \Rightarrow \operatorname{Tr} A < 0$ . Ainsi, pour les systèmes conservatifs, et en particulier les systèmes hamiltoniens, les points fixes sont au mieux stables. L'étude des oscillations autour des points fixes stables des systèmes lagrangien et hamiltoniens fait l'objet des paragraphes suivants.

**Exemple 8.4.** Considérons le système décrit dans l'Exemple 3.1 et discuté plus en détail au début de la Section 4.5. On répète ici les termes de l'exemple.

Considérons un pendule sur un plan en rotation. Une masse ponctuelle est contrainte de se déplacer le long d'un cercle vertical de rayon  $r$  centré à l'origine. Il s'agit de déterminer le mouvement de la masse lorsque le cercle tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes dans le référentiel non inertiel où le cercle est immobile : l'axe  $x$  est perpendiculaire au plan du cercle, l'axe  $y$  est le long du diamètre horizontal, et l'axe  $z$  est aligné avec le diamètre vertical. Les équations de Newton dans ce référentiel sont :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= R_2 - 2mv\omega \sin \theta, \\ m\ddot{y} &= -R_1 \cos \theta + m\omega^2 r \cos \theta, \\ m\ddot{z} &= -mg - R_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (8.17)$$

où  $R_1$  est la force de contrainte radiale,  $R_2$  est la force de contrainte perpendiculaire au plan du cercle, et  $\theta$  est l'angle polaire dans le plan  $y$ - $z$ , avec  $y = r \cos \theta$  et  $z = r \sin \theta$ .

En choisissant maintenant  $z = 0$  au bas du cercle et comme coordonnée lagrangienne l'angle  $\theta$ , de sorte que  $z = r(1 - \cos \theta)$ , on obtient :

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \sin^2 \theta - mgr(1 - \cos \theta) = T' + V_{\text{eff}}, \quad (8.18)$$

où

$$T' \equiv \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2, \quad V_{\text{eff}} \equiv -\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \sin^2 \theta + mgr(1 - \cos \theta). \quad (8.19)$$

Ainsi, les points d'équilibre sont les solutions de

$$0 = \frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} = mr \sin \theta (-\omega^2 r \cos \theta + g), \quad (8.20)$$

c'est-à-dire  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , et  $\theta = \arccos(g/(\omega^2 r))$ , qui n'admet des solutions que si  $g/(\omega^2 r) \leq 1$ . La stabilité est déterminée par

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\phi^2} = mr [\cos \phi (-\omega^2 r \cos \phi) + \omega^2 r \sin^2 \phi]. \quad (8.21)$$

Le point  $\theta = \arccos(g/\omega^2 r)$  est stable, car en ce point  $\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\theta^2} = \omega^2 \sin^2 \theta > 0$ . Si  $g/\omega^2 r > 1$ , le point  $\theta = 0$  est un point stable puisque alors

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = mr(-\omega^2 r + g) > 0.$$

Le point  $\theta = \pi$  est toujours instable car

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi} = -mr(\omega^2 r + g) < 0.$$

**Exemple 8.5.** Le pendule sphérique.

En coordonnées sphériques (voir eq. (4.6)), le lagrangien du pendule sphérique s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \theta. \quad (8.22)$$

Le moment angulaire  $p_\varphi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$  est conservé. Si, à l'instant initial,  $p_\varphi = 0$ , alors le mouvement se déroule dans un plan  $\varphi = \text{constant}$  et l'on retrouve le cas du pendule plan. On considère maintenant le cas  $\mu \equiv p_\varphi/(ml^2) \neq 0$ . Le lagrangien effectif devient alors

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} \equiv -ml(g \cos \theta + \frac{1}{2}\mu^2 \sin^2 \theta).$$

Les points d'équilibre sont solutions de

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta} = (g/l) \sin \theta - \mu^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} = 0, \quad U_{\text{eff}} \equiv \frac{V_{\text{eff}}}{ml^2}. \quad (8.23)$$

Cette équation se ramène à une équation quartique pour  $x \equiv \sin^2 \theta$  de la forme

$$ax^4 + x - 1 = 0,$$

et une solution acceptable ( $0 < x \leq 1$ ) existe, correspondant à  $\theta = \theta_m$  avec  $0 < \theta_m < \pi/2$ . (Dans le cas le plus simple  $a = 1$ , la solution est  $x \simeq 0.5654$ ,  $\theta_m = 0.8510$ .) Un tel point d'équilibre est stable parce que

$$\left. \frac{d^2 U_{\text{eff}}}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_m} = \frac{g}{l} \cos \theta_m + \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta_m} \left( 1 + 3 \frac{\cos \theta_m}{\sin^2 \theta_m} \right) > 0, \quad (8.24)$$

puisque  $\cos \theta_m = (g/l) \mu^{-2} \sin^4 \theta_m > 0$ .

Pour des conditions initiales d'énergie  $E > V_{\text{eff}}(\theta_m)$ , l'angle  $\theta(t)$  peut osciller entre deux valeurs  $\theta_1, \theta_2$  correspondant aux solutions de l'équation  $E - V_{\text{eff}}(\theta) = 0$ , c'est-à-dire aux points où  $\dot{\theta}(t) = 0$ .

## 8.2.2 Petites oscillations : Le point de vue lagrangien

### Oscillateur harmonique

Considérons le problème classique d'une masse  $m$  attachée à un ressort vertical de raideur  $k$  plongée dans le champ de pesanteur. Si l'on désigne par  $y$  l'ordonnée de la masse, et par  $y_0$  la position de la masse lorsque le ressort est au repos, l'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2. \quad (8.25)$$

et l'énergie potentielle est donnée par :

$$V = \frac{1}{2}k(y - y_0)^2 + mgy. \quad (8.26)$$

La position d'équilibre du système est définie par la condition  $y = y_* = \text{constante}$ . Or, d'après les équations de Lagrange,  $y(t)$  est solution de :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (8.27)$$

La position d'équilibre  $y = y_*$  est donc définie par la condition :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad k(y_* - y_0) + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad y_* = y_0 - \frac{mg}{k}. \quad (8.28)$$

Si l'on définit une nouvelle coordonnée  $x = y - y_*$ , il vient :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (8.29)$$

$$V = \frac{1}{2}k(x + y_* - y_0)^2 + mg(x + y_*) \quad (8.30)$$

$$= \frac{1}{2}k(y_* - y_0)^2 + kx(y_* - y_0) + \frac{1}{2}kx^2 + mgx + mgy_* \quad (8.31)$$

$$= \frac{1}{2}k \left( \frac{mg}{k} \right)^2 + x[k(y_* - y_0) + mg] + mgy_* + \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.32)$$

$$= mgy_0 - \frac{(mg)^2}{2k} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (8.33)$$

À la constante  $mgy_0 - \frac{(mg)^2}{2k}$  près, qu'on peut laisser tomber puisque les équations de Lagrange ne font intervenir que les dérivées du lagrangien, on a :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (8.34)$$

D'où l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (8.35)$$

Cherchons une solution complexe  $z(t)$  sous la forme :

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}. \quad (8.36)$$

Il vient :

$$(-m\omega^2 + k)z_0 e^{i\omega t} = 0, \quad (8.37)$$

d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad z_0 \text{ quelconque.} \quad (8.38)$$

Mais si  $z(t) \in \mathbb{C}$  est solution, sa partie réelle est solution puisque les coefficients de l'équation différentielle sont réels. La solution générale s'écrit donc :

$$x(t) = \text{Re}(z_0) \cos \omega t - \text{Im}(z_0) \sin \omega t. \quad (8.39)$$

Les coefficients de  $\cos \omega t$  (i.e.  $\text{Re } z_0$ ) et de  $\sin \omega t$  (i.e.  $-\text{Im } z_0$ ) sont des réels qui sont déterminés par les conditions initiales  $x(t=0)$  et  $\dot{x}(t=0)$ .

Nous allons voir que ce calcul peut être généralisé au problème des oscillations dans les systèmes à  $N$  degrés de liberté, et que de tels systèmes peuvent se ramener à une collection d'oscillateurs harmoniques découplés.

### Systèmes à plusieurs degrés de liberté

De nombreux systèmes peuvent être décrits comme un ensemble de points matériels effectuant de petites oscillations autour de leur position d'équilibre. Par exemple, un solide est un arrangement régulier d'atomes qui occupent en moyenne une position bien déterminée dans le cristal, et qui effectuent de petites oscillations autour de cette position. Les interactions qui conduisent à cette position d'équilibre sont la résultante de plusieurs contributions, mais la nature des petites oscillations ne dépend pas des détails de l'interaction.

En effet, si l'on désigne par  $q_1, \dots, q_n$  les degrés de liberté de ce système (par exemple les  $3N$  coordonnées d'un cristal comportant  $N$  atomes), la condition d'équilibre en  $q_{1*}, \dots, q_{n*}$  impose que

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

en ce point. Le développement de  $V$  autour de la position d'équilibre s'écrit donc :

$$V(\vec{q}) = V(\vec{q}_*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (q_i - q_{i*})(q_j - q_{j*}). \quad (8.40)$$

Si l'on définit  $x_i = q_i - q_{i*}$ , et si l'on note

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_*},$$

l'énergie potentielle devient, à une constante près :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j. \quad (8.41)$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique peut en général s'écrire :

$$T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j. \quad (8.42)$$

Dans le cas de particules de masses  $m_1, \dots, m_n$ , on a bien sûr  $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$ , mais l'étude d'oscillations dans d'autres systèmes peut conduire à une forme quadratique que l'on suppose symétrique ( $m_{ij} = m_{ji}$ ). Les petites oscillations sont donc décrites par le lagrangien :

$$L(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) - V(x_1, \dots, x_n). \quad (8.43)$$

Pour déterminer les équations de Lagrange, regroupons les termes contenant un indice  $l$  donné. On a :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} m_{lj} \dot{x}_l \dot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} m_{il} \dot{x}_i \dot{x}_l + \frac{1}{2} m_{ll} \dot{x}_l^2, \quad (8.44)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} k_{lj} x_l x_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} k_{il} x_i x_l + \frac{1}{2} k_{ll} x_l^2. \quad (8.45)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq l} m_{lj} \dot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq l} m_{il} \dot{x}_i + m_{ll} \dot{x}_l \quad (8.46)$$

$$= \sum_j m_{lj} \dot{x}_j, \quad (m_{ij} = m_{ji}). \quad (8.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = - \sum_j k_{jl} x_j \quad (k_{ij} = k_{ji} \text{ car c'est la dérivée seconde du potentiel}).$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc :

$$\sum_j m_{jl} \ddot{x}_j + \sum_j k_{jl} x_j = 0 \quad (l = 1, \dots, n). \quad (8.48)$$

Cherchons s'il existe des solutions complexes de la forme :

$$\vec{z} = \vec{A} e^{i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (8.49)$$

Les équations de Lagrange conduisent au système

$$- \sum_j m_{jl} A_j \omega^2 + \sum_j k_{jl} A_j = 0 \quad (l = 1, \dots, n),$$

soit

$$\sum_j (-m_{jl} \omega^2 + k_{jl}) A_j = 0 \quad (l = 1, \dots, n). \quad (8.50)$$

Vu que le membre de droite est nul, ce système linéaire n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul, soit :

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0, \quad (8.51)$$

où  $M$  et  $K$  sont des matrices  $(n \times n)$  définies par  $M_{ij} = m_{ij}$  et  $K_{ij} = k_{ij}$ . Par ailleurs,  $\omega$  sera réel si  $\omega^2$  est réel et positif.

**Proposition 2.1.**  $\omega^2$  est réel et positif.

**Démonstration.**  $\vec{q}_*$  minimal  $\Rightarrow \sum_{i,j} k_{ij} a_i a_j$  est une forme quadratique définie positive.

De même, l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive. Mais

$$\sum_j (-m_{jl} \omega^2 + k_{jl}) A_j = 0,$$

donc

$$A_l^* \sum_j (-m_{jl} \omega^2 + k_{jl}) A_j = 0,$$

donc

$$\sum_{j,l} (-m_{jl} \omega^2 + k_{jl}) A_l^* A_j = 0,$$

donc

$$\omega^2 = \frac{\sum_{j,l} k_{jl} A_l^* A_j}{\sum_{j,l} m_{jl} A_l^* A_j}.$$

Mais si une forme quadratique est définie positive *et* symétrique, alors

$$\sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j \geq 0.$$

En effet, avec  $A_i = a_i + ib_i$  et  $A_j = a_j + ib_j$ ,

$$\sum_{i,j} k_{ij} A_i^* A_j = \sum_{i,j} k_{ij} (a_i - ib_i)(a_j + ib_j)$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j} k_{ij} a_i a_j}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{i,j} k_{ij} b_i b_j}_{\geq 0} + \underbrace{i \sum_{i,j} k_{ij} a_i b_j}_{=0} - \underbrace{i \sum_{i,j} k_{ij} a_j b_i}_{=0, \text{ puisque } k_{ij}=k_{ji}}.$$

De même,

$$\sum_{i,j} m_{ij} A_i^* A_j > 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Soient  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$  les solutions de

$$\det(-M\omega^2 + K) = 0,$$

et désignons par  $\vec{A}^i$  une solution réelle associée à  $\omega_i^2$ .  $\vec{A}^i$  peut être choisie réelle car tous les coefficients du système sont réels. La solution générale dans  $\mathbb{C}^n$  peut donc s'écrire

$$\vec{z} = \sum_i c_i \vec{A}^i e^{i\omega_i t}. \quad (8.52)$$

Pour obtenir une solution réelle, il suffit de prendre la partie réelle :

$$\vec{x} = \sum_i (\operatorname{Re}(c_i) \cos(\omega_i t) - \operatorname{Im}(c_i) \sin(\omega_i t)) \vec{A}^i. \quad (8.53)$$

### Coordonnées normales

On va maintenant démontrer que, si les fréquences sont toutes différentes, le système est équivalent à une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants de fréquence  $\omega_i$ . D'après les équations du mouvement, on a :

$$\sum_j (-m_{jl}\omega_i^2 + k_{jl}) (A^i)_j = 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Posons  $\Delta_{ij} = (A^j)_i$ . Pour deux fréquences  $\omega_p$  et  $\omega_q$  ( $p \neq q$ ), on peut donc écrire :

$$\begin{cases} \sum_j (-\omega_p^2 m_{ij} + k_{ij}) \Delta_{jp} = 0, & j = 1, \dots, n, \\ \sum_j (-\omega_q^2 m_{ji} + k_{ji}) \Delta_{jq} = 0, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (8.54)$$

En multipliant la première (resp. la seconde) par  $\Delta_{jq}$  (resp.  $\Delta_{ip}$ ) et en faisant la somme sur  $j$  (resp.  $i$ ), il vient :

$$\sum_j \Delta_{jq} \sum_i (-\omega_p^2 m_{ij} + k_{ij}) \Delta_{ip} = 0, \quad \sum_i \Delta_{ip} \sum_j (-\omega_q^2 m_{ij} + k_{ij}) \Delta_{jq} = 0. \quad (8.55)$$

Si l'on fait la différence des équations, on trouve, puisque  $M$  et  $K$  sont symétriques :

$$(\omega_q^2 - \omega_p^2) \sum_{i,j} m_{ij} \Delta_{ip} \Delta_{jq} = 0 \quad \implies \quad \sum_{i,j} m_{ij} \Delta_{ip} \Delta_{jq} = 0, \quad (8.56)$$

puisque les fréquences sont par hypothèse toutes différentes. Sous forme matricielle, cette équation s'écrit :

$$({}^t \Delta M \Delta)_{pq} = 0 \quad (p \neq q). \quad (8.57)$$

Par ailleurs, on peut encore choisir une condition de normalisation sur les vecteurs  $\vec{A}^p$ . Si l'on impose la condition de normalisation  $\sum_{i,j} A_i^p m_{ij} A_j^p = 1$ , cela conduit à la condition  $\sum_{i,j} \Delta_{ip} m_{ij} \Delta_{jp} = 1$  sur la matrice  $\Delta$ , qui s'écrit sous forme matricielle :

$$({}^t\Delta M \Delta)_{pp} = 1. \quad (8.58)$$

Autrement dit, la matrice  $\Delta$  satisfait la relation :

$${}^t\Delta M \Delta = \mathbb{I}. \quad (8.59)$$

L'équation

$$\sum_{i,j} \Delta_{jq} (-m_{ij} \omega_p^2 + k_{ij}) \Delta_{ip} = 0$$

conduit à

$$\sum_{i,j} \Delta_{jq} k_{ij} \Delta_{ip} = \omega_p^2 \sum_{i,j} \Delta_{jq} m_{ij} \Delta_{ip}. \quad (8.60)$$

Soit, sous forme matricielle,

$$({}^t\Delta K \Delta)_{pq} = \omega_p^2 \delta_{pq}, \quad (8.61)$$

ou encore

$${}^t\Delta K \Delta = \Omega, \quad (8.62)$$

où l'on a introduit la matrice  $\Omega$  définie par

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \cdots & 0 & \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Si l'on définit de nouvelles coordonnées  $Q_i$  par

$$x_i = \sum_j \Delta_{ij} Q_j \quad \text{soit} \quad \vec{x} = \Delta \vec{Q}. \quad (8.63)$$

Le lagrangien s'écrit donc

$$L = \frac{1}{2} \left( {}^t\dot{\vec{x}} M \dot{\vec{x}} - {}^t\vec{x} K \vec{x} \right) \quad (8.64)$$

$$= \frac{1}{2} \left( {}^t\dot{\vec{Q}} {}^t\Delta M \Delta \dot{\vec{Q}} - {}^t\vec{Q} {}^t\Delta K \Delta \vec{Q} \right) \quad (8.65)$$

$$= \frac{1}{2} \left( {}^t\dot{\vec{Q}} \dot{\vec{Q}} - {}^t\vec{Q} \Omega \vec{Q} \right) \quad (8.66)$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left( \dot{Q}_i^2 - \omega_i^2 Q_i^2 \right). \quad (8.67)$$

Le lagrangien est la somme de lagrangiens indépendants. Les  $Q_i$  sont appelés *coordonnées normales*.

### 8.2.3 Petites oscillations : Le point de vue hamiltonien

Le problème général des petites oscillations a été traité au chapitre 2 dans le cadre du formalisme lagrangien. On peut également le traiter dans le cadre du formalisme hamiltonien. Comme les équations de Hamilton sont des équations différentielles du premier ordre, ce problème est un exemple de système dynamique.

Nous repartons donc d'un système décrit par le potentiel

$$V(\vec{q}) = V(\vec{q}_*) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} (q_i - q_{i*})(q_j - q_{j*}). \quad (8.68)$$

où  $\vec{q}_* = (q_{1*}, \dots, q_{n*})$  est la position d'équilibre. Les notations sont celles de la section 2.3, et l'on se propose de refaire le même calcul dans le cadre du formalisme hamiltonien.

#### Première étape : Transformation de Legendre

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\vec{q}) \quad (8.69)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij} \dot{q}_j \quad (8.70)$$

soit, en notation vectorielle,

$$\vec{p} = M \dot{\vec{q}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{q}} = M^{-1} \vec{p} \quad (8.71)$$

$$T = \frac{1}{2} {}^t \dot{\vec{q}} M \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} M M^{-1} \vec{p} = \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p}. \quad (8.72)$$

soit

$$T = \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} \quad (8.73)$$

puisque  ${}^t M^{-1} = M^{-1}$  vu que  $M$  est symétrique. Ainsi

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} - \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} + V(\vec{q}) = \frac{1}{2} {}^t \vec{p} M^{-1} \vec{p} + V(\vec{q}). \quad (8.74)$$

#### Deuxième étape : Point fixe

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_j (M^{-1})_{ij} p_j = 0, \end{cases} \quad (8.75)$$

Les conditions  $\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$  sont équivalentes à celles dérivées du lagrangien.

Les conditions  $\sum_j (M^{-1})_{ij} p_j = 0$  pour tout  $i$  impliquent que  $p_j = 0$  pour tout  $j$  car  $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1} \neq 0$ .

**Troisième étape : Équations linéarisées**

Posons

$$y_i = \begin{cases} q_i - q_{i*}, & i = 1, \dots, n, \\ p_{i-n}, & i = n + 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (8.76)$$

Les équations du mouvement obtenues en remplaçant  $V$  par son développement de Taylor au second ordre s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \sum_{j=1}^n (M^{-1})_{ij} y_{j+n}, & i = 1, \dots, n, \\ \dot{y}_i = - \sum_{j=1}^n K_{(i-n)j} y_j, & i = n + 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (8.77)$$

La matrice  $A$  définie par  $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  est donc donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -K & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.78)$$

La solution générale est donc de la forme

$$\vec{y} = \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^n c_j e^{a_j t} \vec{z}_j \right), \quad (8.79)$$

où les  $a_j$  sont les valeurs propres de  $A$  et les  $\vec{z}_j$  les vecteurs propres associés. L'équation caractéristique de ces valeurs propres s'écrit :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_{2n}) = 0. \quad (8.80)$$

soit

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda \mathbb{I}_n & M^{-1} \\ -K & -\lambda \mathbb{I}_n \end{pmatrix} = 0. \quad (8.81)$$

**Proposition 5.1.**

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_{2n}) = 0 \iff \det(-M\omega^2 + K) = 0, \text{ avec } \lambda = i\omega.$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}_{2n}) &= \lambda^{2n} \det(\mathbb{I}_{2n} - A\lambda^{-1}) \\ \mathbb{I}_{2n} - A\lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & -M^{-1}\lambda^{-1} \\ K\lambda^{-1} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ K\lambda^{-1} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & -M^{-1}\lambda^{-1} \\ 0 & \mathbb{I}_n + KM^{-1}\lambda^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.82)$$

D'où

$$\det(\mathbb{I}_{2n} - A\lambda^{-1}) = \det(\mathbb{I}_n + KM^{-1}\lambda^{-2}), \quad (8.83)$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\mathbb{I}_{2n}) &= \det(\lambda^2\mathbb{I}_n + KM^{-1}) \\ &= \det(\lambda^2M + K) \det(M^{-1}). \end{aligned} \quad (8.84)$$

Ainsi

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}_{2n}) = 0 \iff \det(\lambda^2M + K) = 0 \iff \det(-\omega^2M + K) = 0,$$

puisque  $\lambda^2 = -\omega^2$ .

C.Q.F.D.

**Conséquence :** Puisque les  $\omega_j$  sont réels, les valeurs propres  $a_j = i\omega_j$  sont imaginaires pures. On a donc des oscillations non amorties.

### Expression avec les coordonnées normales

Si l'on désigne par  $P_i$  l'impulsion généralisée conjuguée de  $Q_i$ , l'hamiltonien prend la forme

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2). \quad (8.85)$$

L'hamiltonien est la somme d'hamiltoniens indépendants décrivant des oscillateurs harmoniques de fréquences  $\omega_i$ . Le système est évidemment séparable. Les intégrales premières sont les énergies

$$E_i = \frac{1}{2} (P_i^2 + \omega_i^2 Q_i^2) \quad (8.86)$$

des différents oscillateurs.

Les variables actions associées sont données par  $I_i = E_i/\omega_i$ .

**Remarque 8.2.** En mécanique quantique, les niveaux d'énergie possibles sont donc

$$E = \sum_i \hbar\omega_i n_i, \quad (8.87)$$

$n_i$  entier, à une constante près.

### Exemple 8.6. Molécule triatomique.

Considérons une molécule triatomique, par exemple  $H_2S$  (sulfure d'hydrogène). La configuration d'équilibre est linéaire, avec l'atome de soufre en position centrale et les deux atomes d'hydrogène aux deux extrémités. On discute ici les petites oscillations correspondantes.

Il est raisonnable de négliger les mouvements transverses (c'est-à-dire de supposer que la configuration des trois atomes reste linéaire) et de décrire le mouvement autour du point d'équilibre dans l'approximation harmonique quadratique du potentiel, en négligeant une interaction directe entre les deux atomes d'hydrogène :

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}k[(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2], \quad (8.88)$$

où  $x_1, x_2, x_3$  désignent les déplacements par rapport aux positions d'équilibre des deux atomes d'hydrogène et de l'atome de soufre. À partir du lagrangien (8.43), les équations de Lagrange donnent :

$$M_{ij} \ddot{x}_j = V_{ij} x_j. \quad (8.89)$$

On cherche des solutions de la forme

$$\tilde{q}_i^\alpha = \operatorname{Re}(A_i^\alpha e^{i\omega_\alpha t}).$$

Par linéarité des équations, on peut commencer avec  $A_i^\alpha e^{i\omega_\alpha t}$  et ne prendre la partie réelle qu'à la fin. L'existence de solutions non triviales de cette forme impose que les fréquences  $\omega_\alpha$  vérifient :

$$\det(-\omega_\alpha^2 M + V) = 0. \quad (8.90)$$

Une fois les fréquences  $\omega_\alpha$  déterminées, les modes correspondants sont obtenus comme solutions de l'équation aux valeurs propres suivante (somme sur  $j$ ) :

$$\left(-\omega_\alpha^2 M_{ij} + V_{ij}\right) A_j^\alpha = 0. \quad (8.91)$$

La matrice des masses  $\mathcal{M}$  et la matrice du potentiel  $\mathcal{V}$  sont

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & k & -k \\ -k & -k & -2k \end{pmatrix}.$$

En appliquant l'équation (8.90), on obtient :

$$(-\omega_\alpha^2 m + k) \omega_\alpha^2 (\omega_\alpha^2 m M - k M - 2km) = 0. \quad (8.92)$$

Les fréquences  $\omega_\alpha$  qui satisfont cette équation sont donc :

$$\omega_0^2 = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} (1 + 2m/M).$$

Pour chaque  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ , il est facile de résoudre l'équation aux valeurs propres (8.91), et l'on retrouve ainsi — comme attendu — tous les résultats obtenus par la méthode précédente. Pour simplifier les équations, introduisons le changement d'échelle suivant :

$$x_3 \rightarrow \alpha^{-1} x_3 \equiv X, \quad \alpha \equiv \sqrt{m/M},$$

Les vecteurs propres correspondants sont, en omettant les constantes de normalisation :

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{1+2\alpha^2} \equiv v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Il est clair que l'évolution temporelle de  $v_0$  est une évolution libre (aucune force harmonique n'agit) ; elle correspond à une variable  $\tilde{Q}_0$  qui est la combinaison suivante des variables originales :

$$\tilde{Q}_0 = x_1 + x_2 + \alpha^{-1} X = x_1 + x_2 + (M/m) x_3,$$

c'est-à-dire (à une constante de normalisation près) la position  $x_G$  du centre de masse. On vérifie d'ailleurs facilement à l'aide des équations de Lagrange que  $\ddot{x}_G = 0$ . L'évolution temporelle de  $v_1$  est une oscillation harmonique de fréquence  $\tilde{\omega}_1 = 1$  ; elle correspond à la combinaison linéaire

$$\tilde{Q}_1 = x_1 - x_2,$$

qui oscille avec une fréquence  $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ . Cela signifie que les deux atomes d'hydrogène oscillent en opposition de phase de 180 degrés, tandis que l'atome de soufre reste fixe. Enfin, l'oscillation harmonique associée à  $v_3$  décrit l'évolution temporelle de la variable

$$\tilde{Q}_3 = x_1 + x_2 - 2x_3.$$

Une telle combinaison linéaire des variables originales correspond au mouvement en phase des deux atomes d'hydrogène et au mouvement opposé de l'atome de soufre.